

# Geodésicas en variedades hiperbólicas

María Victoria Melián Pérez

Director de tesis:  
José Luis Fernández Pérez

Memoria para aspirar al grado de Doctor  
en Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemáticas  
de la Universidad Autónoma de Madrid

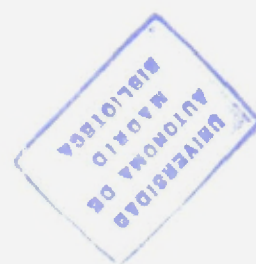
Madrid, Mayo de 1994



SC  
C  
926

# Geodésicas en variedades hiperbólicas

María Victoria Melián Pérez



R. B. C. 59.879

Director de tesis:  
José Luis Fernández Pérez

Memoria para aspirar al grado de Doctor  
en Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemáticas  
de la Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Mayo de 1.994





*A mis padres,*

*y a Rafael.*



Recuerdo la cualidad que primero llamó mi atención de José Luis Fernández cuando lo conocí, el entusiasmo contagioso que siempre le ha caracterizado. Su gran ayuda y constante estímulo han sido fundamentales para la realización de este trabajo. Su carácter generoso y la amistad que me ha brindado han hecho de estos años un periodo muy grato de mi vida que no olvidaré.

A mi amigo Domingo Pestana quiero expresarle aquí mi gratitud por su inestimable ayuda y colaboración y, en particular, por la amistad y el afecto que he recibido de él desde que nos conocimos.

Mi agradecimiento también a José Manuel Rodríguez y a José González Llorente en quienes siempre he encontrado actitudes generosas y apoyo desinteresado. Asimismo a mis amigos, especialmente a Ana Vargas y Marcela Molina, quienes me han acompañado y ayudado durante esta etapa.

Además quiero dar las gracias a Maurice Dodson y Sanju Velani por los trabajos en colaboración que hemos realizado. También a Detta Dickinson por las interesantes conversaciones durante su visita a Madrid y a Paddy Patterson y Bernd Stratman quienes me han comunicado sus resultados. El contacto que he mantenido con todos ellos ha enriquecido mi trabajo.

A los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid les agradezco su permanente estímulo para el desarrollo de la investigación en este Centro.

Finalmente a Rafael y al resto de mi familia agradezco su paciencia y su confianza en mí.



# Índice

<b>Notaciones.</b>	i
<b>Introducción.</b>	1
<b>Capítulo 1: Nociones básicas.</b>	9
1.1. Superficies de Riemann. Métrica de Poincaré	10
1.2. Variedades hiperbólicas.	14
1.3. Dimensión de Hausdorff y $\mu$ -dimensión.	16
1.4. Algunos teoremas de la teoría métrica de aproximación diofántica.	18
1.5. Conjuntos límite de un grupo Kleiniano.	23
1.6. La medida de Patterson.El flujo geodésico.	26
1.7. Transformaciones de Möbius y números de Clifford.	29
<b>Capítulo 2: Sistemas bien distribuidos y resultados de aproximación.</b>	33
2.1. Sistemas bien distribuidos.	34
2.2. Sistemas bien distribuidos y conjuntos bien aproximables.	36
2.2.1. Demostración del teorema 1.	37
2.2.2. Demostración del teorema 2.	43
2.3. Sistemas bien distribuidos y resultados tipo Khintchine.	46
<b>Capítulo 3: Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas de volumen finito.</b>	51
3.1. Excursiones geodésicas en cúspides.	52
3.1.1. Demostración de los teoremas 5 y 5'.	56
3.2. Excursiones geodésicas en entornos de puntos de $\mathcal{M}$ .	64
3.2.1 Demostraciones de los teoremas.	65
<b>Capítulo 4: Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas geoméricamente finitas sin cúspides.</b>	71
4.1. Introducción.	71
4.2. Demostración de los teoremas.	74

<b>Capítulo 5: Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas geoméricamente finitas.</b>	87
5.1. Introducción.	87
5.2. Demostración de los teoremas.	91
5.2.1. Demostración de los lemas 12 y 13.	95
<b>Capítulo 6: Geodésicas acotadas en variedades hiperbólicas.</b>	101
6.1. Conexión con el conjunto límite.	103
6.2. Reducción a superficies de tipo finito.	104
6.3. Superficies de tipo finito sin cúspides.	104
6.4. Superficies de tipo finito con cúspides.	105
6.5. Variedades hiperbólicas 3-dimensionales.	115
6.6. Aplicaciones.	119
<b>Referencias.</b>	121

# Introducción

Recientemente, el estudio de la estructura métrica de los grupos Fuchsianos y Kleinianos ha recibido mucha atención. Esto se debe a varias razones, entre las que cabe destacar:

- (i) Su aplicación a la teoría de funciones que se deriva de que el cubrimiento universal de las superficies de Riemann suele exhibir un comportamiento extremo en la clase de funciones holomorfas con valores en la superficie.
  - (ii) La conexión con problemas de la teoría métrica de aproximación diofántica.
- Estas dos constituyen las motivaciones fundamentales de esta tesis. Y, señalamos también,
- (iii) Su utilidad y estrecha conexión con la teoría del espacio de Teichmüller. Por ejemplo, el problema clásico de Ahlfors que pregunta si el área del conjunto límite de un grupo Kleiniano finitamente generado es cero o ese conjunto límite es toda la esfera; problema que permanece abierto.
  - (iv) El paralelismo con la teoría de iteración de funciones racionales: sistemas dinámicos complejos.
  - (v) El papel de las variedades hiperbólicas en la clasificación de 3-variedades.

La motivación central de esta memoria son ciertos teoremas de buena y mala aproximación de números reales por racionales debidos a Khintchine, Jarník-Besicovitch y Jarník, además del resultado elemental de Dirichlet.

Si consideramos el grupo de las matrices dos por dos sobre los números enteros y determinante uno, es decir, el grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , éste actúa discontinuamente en el semiespacio  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . La órbita de  $\infty$  está formada justamente por los números racionales y si consideramos la superficie modular  $\mathbb{C} = \mathbb{H}^2/SL(2, \mathbb{Z})$  con la métrica proyectada de la métrica de Poincaré de  $\mathbb{H}^2$ , podemos interpretar los resultados de aproximación diofántica en términos del comportamiento asintótico de las geodésicas de  $\mathbb{C}$ . Recíprocamente, resultados sobre el comportamiento asintótico de las geodésicas se traducen en resultados de aproximación y ahí radica una de las razones del interés de esta interpretación.

La observación de partida es que este fenómeno no es exclusivo de la superficie modular y, en general, se tiene una estrecha relación entre algunos resultados sobre el comportamiento asintótico de geodésicas en variedades hiperbólicas y resultados de aproximación por algunas órbitas del grupo de cubrimiento de la variedad.



A continuación describimos algunos de los resultados obtenidos así como ciertas aplicaciones.

Denotaremos por  $\mathcal{M}$  una variedad hiperbólica  $(d+1)$ -dimensional, es decir, una variedad Riemanniana completa de curvatura seccional constante negativa y dimensión  $d+1$ . A partir de ahora,  $p, q$  serán puntos en  $\mathcal{M}$  y  $S(p)$  denotará la esfera unidad del espacio tangente de  $\mathcal{M}$  en  $p$ . Además, para todo  $v \in S(p)$ , denotaremos por  $\gamma_{p,v}(t)$  la geodésica que parte de  $p$  con dirección  $v$  y por  $dist$  la distancia en  $\mathcal{M}$ .

En [S2] D. Sullivan demostró que si  $\mathcal{M}$  es no compacta pero con *volumen finito*, entonces

**Teorema (Sullivan).** *Para casi toda dirección  $v \in S(q)$ , se tiene que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{dist(\gamma_{q,v}(t), p)}{\log t} = \frac{1}{d}.$$

Esto tiene como corolario el teorema clásico de Khintchine.

**Teorema (Khintchine).** *Para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$  se verifica*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 \log q},$$

para infinitos  $p, q \in \mathbb{Z}$  primos relativos.

De hecho se puede reemplazar  $\frac{1}{q^2 \log q}$  por  $\frac{F(q)}{q}$ , con  $F(x)$  una función tal que  $\frac{F(x)}{x}$  es decreciente y  $\sum_n F(n) = \infty$ .

Es fácil ver que el conjunto de geodésicas que divergen con velocidad  $t$ , es decir, tales que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{dist(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} = 1,$$

es numerable. El teorema 4 del capítulo 3 da la dimensión de Hausdorff de un conjunto de geodésicas que interpola entre estas dos situaciones. En lo que sigue  $DH$  denotará la dimensión de Hausdorff.

**Teorema 4.** *Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,*

$$DH\left(\{v \in S(q) : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{dist(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} \geq \alpha\}\right) = d(1 - \alpha).$$



Este resultado es válido para  $\mathcal{M}$  no compacta y de volumen finito. En este caso se tiene que  $\mathcal{M} \cong X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell$ , donde  $X_0$  es compacta y los  $Y_\ell$  son cúspides. Por tanto el teorema de Sullivan y el teorema 4 pueden expresarse en términos de alturas alcanzadas en las cúspides de  $\mathcal{M}$  y se refieren al conjunto de geodésicas que entran infinitas veces (con cierta velocidad) a las cúspides.

Estos resultados geométricos se trasladan en resultados de buena aproximación por elementos parabólicos para subgrupos discretos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  con volumen finito y con elementos parabólicos. En particular, al considerar  $\tau = 1/(1 - \alpha)$  y la superficie modular  $\mathcal{M} = \mathbb{H}^2/SL(2, \mathbb{Z})$ , se obtiene como corolario el teorema clásico de Jarník-Besicovitch.

**Corolario 1** (Jarník-Besicovich). *Para cada  $\tau > 1$ ,*

$$DH\left(\left\{\xi \in \mathbb{R} : \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq c(\xi) \frac{1}{q^{2\tau}}\right.\right. \\ \left.\left.\text{para infinitos } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ con m.c.d.}(p, q) = 1\right\}\right) = \frac{1}{\tau}.$$

Al considerar el grupo de Picard  $SL(2, \mathbb{Z}(\sqrt{-1}))$  o más generalmente  $G = SL(2, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{A}$  es el anillo de enteros de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$  y  $n$  es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto se obtiene,

**Corolario 2.** *Para cada  $\tau > 1$ ,*

$$DH\left(\left\{\xi \in \mathbb{C} : \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq c(\xi) \frac{1}{|q|^{2\tau}}\right.\right. \\ \left.\left.\text{para infinitos } p, q \text{ primos relativos en } \mathcal{A}\right\}\right) = \frac{2}{\tau}.$$

Decimos que  $p, q \in \mathcal{A}$  son *primos relativos* si existen  $r, s \in \mathcal{A}$  tales que  $pr + qs = 1$ .

Otros resultados de este tipo para otros grupos aparecen en la sección 1.1 del capítulo 3.

Como ya hemos señalado, el teorema 4 se refiere a geodésicas que entran infinitas veces en las cúspides, es decir, entran infinitas veces en entornos centrados en puntos de la frontera ideal. Para puntos de  $\mathcal{M}$  los resultados análogos son válidos y los podemos enunciar como sigue:

**Teorema 6.** *Sea  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  una familia finita de puntos de  $\mathcal{M}$ . Para todo  $\alpha > 0$ ,*

$$DH\left(\left\{v \in S(q) : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p_i)}}{t} \geq \alpha, \text{ para todo } p_i \in P\right\}\right) = \frac{d}{1 + \alpha}.$$

**Teorema 7.** *Para casi toda dirección  $v \in S(q)$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}}{\log t} = \frac{1}{d}.$$

Como antes, el teorema 6 se traduce en un resultado tipo Jarnik-Besicovitch y el teorema 7 en un resultado tipo Khintchine.

Los resultados hasta ahora mencionados se refieren a variedades hiperbólicas de volumen finito. Ahora vamos a considerar variedades hiperbólicas con grupo fundamental geoméricamente finito pero no necesariamente de volumen finito. Esta clase de variedades son de interés para las aplicaciones a teoría de funciones y para aplicaciones aritméticas, por ejemplo, cuando consideramos los grupos de Hecke.

El estudio es bastante más complicado pues ahora el flujo geodésico no es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue. El sustituto adecuado es la medida de Patterson (ver capítulo 1, sección 1.6) que es una medida de probabilidad con soporte en el conjunto límite del grupo de cubrimiento  $G$  de la variedad  $\mathcal{M}$ .

En el caso de que la variedad no tenga cúspides (caso estudiado en el capítulo 4), la medida de Patterson es un múltiplo constante de la medida de Hausdorff  $\delta$ -dimensional del conjunto límite del grupo de cubrimiento, donde  $\delta$  es el exponente de convergencia del grupo. Los resultados obtenidos son precisos y mencionamos algunos a continuación.

Dada una geodésica cerrada dirigida  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{M}$ , estudiamos el conjunto de geodésicas en  $\mathcal{M}$  que partiendo de un punto prefijado  $p$  se “acercan” infinitas veces a  $\mathcal{G}$ . Más específicamente, la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  estará cerca de  $\mathcal{G}$  en un tiempo  $t_0$ , si existe  $t'_0$  tal que la distancia en  $\mathcal{M}$  entre  $\gamma_{p,v}(t_0)$  y  $\mathcal{G}(t'_0)$  es pequeña y además las direcciones de  $\dot{\gamma}_{p,v}(t_0)$  y  $\dot{\mathcal{G}}(t'_0)$  difieren también poco. La distancia  $d_{\Omega(\mathcal{M})}$  (ver capítulo 1, sección 1.6) formaliza esta idea de distancia en  $\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \times \partial \mathbb{B}^{d+1}$ .

Sea  $\mathcal{V} = \{\mathcal{G}_\ell(t)\}_{\ell \in \mathcal{L}}$  una colección finita de geodésicas cerradas dirigidas en  $\mathcal{M}$ . Para cada  $\mathcal{G}_\ell$  definimos

$$\Omega(\mathcal{G}_\ell) = \{(\mathcal{G}_\ell(t), \dot{\mathcal{G}}_\ell(t))\}.$$

Sea  $\mu$  la medida en  $S(p)$  inducida por la medida de Patterson y  $DH_\mu$  la  $\mu$ -dimensión, que se define de forma similar a la dimensión de Hausdorff sustituyendo los radios de las bolas por la  $\mu$  medida de los mismos.

**Teorema 8.** *Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ , sea  $L(\mathcal{V}, \alpha)$  el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v}(t), \dot{\gamma}_{p,v}(t)), \Omega(\mathcal{G}_\ell))}}{t} \geq \alpha,$$

para toda  $\mathcal{G}_t \in \mathcal{V}$ . Entonces

$$DH(L(\mathcal{V}, \alpha)) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \delta$$

y

$$DH_\mu(L(\mathcal{V}, \alpha)) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

donde  $\delta$  es el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de  $\mathcal{M}$ .

**Teorema 9.** Sea  $\mathcal{G}$  una geodésica cerrada dirigida en  $\mathcal{M}$ . Para casi toda dirección  $v \in S(p)$  con respecto a  $\mu$ , se tiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v}(t), \dot{\gamma}_{p,v}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} = \frac{1}{2\delta}.$$

De nuevo estos resultados pueden trasladarse en resultados de buena aproximación de puntos límites pero ahora por puntos fijos hiperbólicos.

En presencia de cúspides la medida de Patterson tiene un comportamiento mucho más delicado y las estimaciones son más complicadas. Este caso general es estudiado en el capítulo 5 y los resultados obtenidos no son tan precisos.

Como hemos señalado anteriormente, los resultados sobre geodésicas hasta ahora descritos se traducen en resultados de buena aproximación en  $\mathbb{R}^d$  que generalizan los teoremas de Jarník-Besicovitch y de Khintchine. El capítulo 2 está dedicado a este tipo de problemas y las demostraciones de los teoremas de buena aproximación de los capítulos 3, 4 y 5 se basan en los teoremas generales 1, 2 y 3 del capítulo dos.

En el capítulo 2 se introduce la noción de *sistema bien distribuido*  $(W, \mu)$ . Aquí  $W$  es una familia numerable de bolas euclídeas en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mu$  una medida en  $\mathbb{R}^d$  que verifica una serie de propiedades que relacionan a  $W$  y  $\mu$ . El uso del término “bien distribuido” se debe principalmente a una propiedad de equidistribución en  $\mathbb{R}^d$  con respecto a la medida  $\mu$  de las bolas en  $W$  de radios comparables. La definición de sistema bien distribuido en  $\mathbb{R}^d$  en el caso en que  $\mu$  es la medida de Lebesgue, es, en cierto sentido, una extensión del concepto de *sistema regular* en  $\mathbb{R}$  introducido por A. Baker y W. Schmidt en [BS] para obtener resultados de aproximación por números algebraicos de altura dada.

En los sistemas bien distribuidos que aparecen en los capítulos 3, 4 y 5 la medida  $\mu$  es la medida de Patterson.

El último capítulo de esta memoria está dedicado al estudio del conjunto de geodésicas en una variedad hiperbólica  $\mathcal{M}$  que permanecen acotadas. Este es, sin duda, el resultado más relevante de este trabajo.



El origen de esta clase de resultados es el siguiente teorema clásico de Jarník.

**Teorema (Jarník).** *El conjunto de números reales  $\xi \in \mathbb{R}$  tales que*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\xi)}{q^2},$$

*para todo par  $p, q$  de enteros primos relativos, tiene dimensión de Hausdorff uno.*

Estos números son los números más irracionales puesto que no se aproximan bien por racionales, y el ejemplo primordial es la razón aurea  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . El teorema de Jarník se interpreta en términos del conjunto de geodésicas acotadas de la superficie modular  $\mathbb{H}^2/SL(2, \mathbb{Z})$  y nos dice que dicho conjunto tiene dimensión de Hausdorff uno.

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann y  $p$  un punto en  $\mathcal{R}$ . Decimos que la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  con punto inicial  $p$  está acotada si para todo tiempo  $t \geq 0$  permanece a una distancia acotada del punto  $p$ . Nos interesa estudiar el conjunto  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  está acotada. En este contexto obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 14.** *Para toda superficie de Riemann  $\mathcal{R} \cong \Delta/G$ , distinta del disco punteado, y para todo  $p \in \mathcal{R}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  es  $\delta(G)$ . Si  $\mathcal{R}$  es el disco punteado  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  es vacío.*

Aquí de nuevo  $\delta(G)$  denota el exponente de convergencia de  $G$ .

El caso de superficies de Riemann excepcionales con sus geometrías canónicas de curvatura constante, es muy simple.  $\hat{\mathbb{C}}$  y el toro son superficies compactas. En el plano ninguna geodésica está acotada, mientras que en el cilindro solamente dos geodésicas desde cada punto lo están.

Para superficies de área finita el exponente de convergencia es uno y era ya conocido que el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}$  está acotada tenía dimensión de Hausdorff uno. Este resultado es una consecuencia de la extensión de S.J. Patterson [P1] del teorema de Jarník. Posteriormente, S.G. Dani utilizando la noción de conjuntos ganadores de una versión métrica, debida a W. Schmidt [Sch1] de un juego de Banach-Mazur [BM], extendió el resultado y probó en [D1] que para cualquier variedad Riemanniana  $\mathcal{M}$  completa de curvatura seccional constante negativa y con volumen finito el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que  $\gamma_v$  está acotada tiene dimensión de Hausdorff plena.

Importa señalar que el teorema 14 es válido para superficies de Riemann arbitrarias sin ninguna hipótesis de finitud y, por tanto, completa este tipo de resultados en el caso de dimensión dos.

En dimensión superior si  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  y  $G = \cup G_n$  donde  $\{G_n\}$  es una sucesión creciente de subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  una demostración similar a la del teorema 14 da el mismo resultado cuando  $\mathcal{M}$  no tiene cúspides o  $\mathcal{M}$  tiene alguna cúspide maximal. En particular, esto incluye el teorema de S.G. Dani, puesto que si  $\mathcal{M}$  tiene volumen finito todas las cúspides son maximales.

Para variedades hiperbólicas de dimensión tres obtenemos también el siguiente resultado general sin ninguna hipótesis sobre el rango de las cúspides.

**Teorema 15.** *Para toda variedad hiperbólica geoméricamente finita de dimensión tres,  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$ , excepto los cocientes de grupos parabólicos, y para todo  $p \in \mathcal{M}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)$  es  $\delta(G)$ .*

Este resultado es también válido para  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$  con  $G$  una unión creciente de grupos Kleinianos geoméricamente finitos.

El estudio de las geodésicas acotadas (y en general de órbitas acotadas de flujos) es de interés muy actual. Tras la compleción de la prueba de los teoremas 14 y 15 (y su distribución en forma de prepublicación), B. Stratman de la Universidad de Göttingen nos comunicó que él también acababa de obtener resultados similares para subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . Nuestro resultado es más fuerte en dimensión dos puesto que es válido para superficies de Riemann arbitrarias sin ninguna hipótesis de finitud. Por otra parte, en [St] se estudia el caso de variedades hiperbólicas  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  geoméricamente finitas con cúspides y ninguna de ellas de rango maximal para todo  $d \geq 2$ . En nuestro trabajo sólo nos planteamos este problema para  $d = 2$ . Las demostraciones son diferentes.

Muy recientemente, C. Bishop y P. Jones han demostrado en [BJ] que si  $G$  es un subgrupo discreto no elemental de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^3)$  entonces la dimensión de Hausdorff del conjunto límite cónico de  $G$  es igual al exponente de convergencia de  $G$ . En particular, también se obtiene de su prueba que si  $\mathcal{M} \cong \mathbb{B}^3/G$  con  $G$  finitamente generado entonces  $DH(\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)) = \delta(G)$ .

C. Bishop y P. Jones también demuestran que para todo subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^3)$  finitamente generado que es geoméricamente infinito, la dimensión de Hausdorff del conjunto límite es 2. Por tanto, si  $\mathcal{M} = \mathbb{H}^3/G$ , y la dimensión de Hausdorff del conjunto límite  $\Lambda(G)$  es menor que dos, entonces cualquier subgrupo finitamente generado de  $G$  es geoméricamente finito y, en consecuencia,  $G$  es una unión creciente de grupos Kleinianos geoméricamente finitos. Se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 16.** *Para toda variedad hiperbólica de dimensión tres,  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$  con  $DH(\Lambda(G)) < 2$ , excepto los cocientes de grupos parabólicos, y para todo  $p \in \mathcal{M}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)$  es  $\delta(G)$ .*

El teorema 14 se traduce en un resultado de mala aproximación y cuando

consideramos en particular los grupos de Hecke  $\Gamma(\lambda)$  se obtiene el siguiente resultado tipo Jarník (ver capítulo 1, sección 1.7).

**Corolario 7.** *La dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos límites  $\xi \in \Lambda(\Gamma(\lambda))$  tales que*

$$\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| \geq \frac{C(\xi)}{\beta^2},$$

*para toda s-fracción finita, es  $\delta(\Gamma(\lambda))$ .*

Recordamos que la función  $\lambda \rightarrow \delta(\Gamma(\lambda))$  es continua, Lipschitz, estrictamente decreciente en  $[2, \infty)$  y satisface que  $\delta(\Gamma(2)) = 1$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta(\Gamma(\lambda)) = 1/2$ .

Algunos de los resultados de esta memoria aparecen en los siguientes artículos.

- [MP] Melián, M. V., Pestana, D., **Geodesic excursions into cusps in finite-volume hyperbolic manifolds.** *Michigan Math. J.* 40 (1992), 77-93.
- [DMPV] Dodson, M. M., Melián, M. V., Pestana, D., Velani, S., **Ubiquity and Patterson measure.** Por aparecer en *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*.
- [FM] Fernández, J. L., Melián, M. V., **Bounded geodesics in hyperbolic manifolds.** Prepublicación. Agosto, 1993.



# Capítulo 1

## Nociones básicas

El objetivo de este capítulo es reunir algunas definiciones y resultados previos relacionados con el trabajo realizado en esta memoria y describir en cierta forma el contexto de la misma. El capítulo está dividido en las siguientes secciones:

- 1.1. Superficies de Riemann. Métrica de Poincaré.
- 1.2. Variedades hiperbólicas.
- 1.3. Dimensión de Hausdorff y  $\mu$ -dimensión.
- 1.4. Algunos teoremas de la teoría métrica de aproximación diofántica.
- 1.5. Conjuntos límite de un grupo Kleiniano.
- 1.6. La medida de Patterson. El flujo geodésico.
- 1.7. Transformaciones de Möbius y números de Clifford.

La primera sección está dedicada a las superficies de Riemann. Aquí describimos los conceptos de *cúspide* y *fonil* que utilizaremos más adelante. Referimos a [A1], [B], [Be], [FK], [G], [K], y [P1] para más detalles.

En la sección 1.2 describimos algunas propiedades de las variedades hiperbólicas y generalizamos el concepto de cúspide. Las referencias básicas son [G], [Th], [T1] y [W].

En la sección 1.3 se dan las definiciones de  $\alpha$ -contenido y dimensión de Hausdorff así como algunas de sus propiedades. También se define la  $\mu$ -dimensión y el  $(\alpha, \mu)$ -contenido. Como referencias se tienen [C], [F], [KS] y [R].

La sección 1.4 contiene los teoremas clásicos de Jarník, Jarník-Besicovitch y Khinchine así como su interpretación en términos de geodésicas y las extensiones del teorema de Jarník debidas a S. Patterson y S. G. Dani. Se comentan además las técnicas de sistema regular, sistema ubicuo y juegos ganadores que permiten obtener cotas inferiores para la dimensión de Hausdorff de ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ . Como referencias para esta sección se tienen [BS], [DVR], [D1], [D2], [Fo], [J], [P1], [Sch1], [Sch2] y [S2].

En la sección 1.5 se definen el conjunto límite y el conjunto límite cónico de un grupo Kleiniano. Se comentan además algunos resultados sobre el tamaño de estos conjuntos y su relación con el exponente de convergencia.

La sección siguiente está dedicada a describir la construcción de la medida de Patterson así como algunas de sus propiedades. Se define también la medida de Sullivan que es una medida en el espacio tangente de una variedad hiperbólica derivada de la medida de Patterson y se describe el comportamiento del flujo geodésico.

Las secciones 1.5 y 1.6 están muy relacionadas porque las medidas de Patterson y Sullivan son un ingrediente fundamental en la obtención de la dimensión de Hausdorff del conjunto límite. Para estas dos secciones referimos a [A2], [A3], [N2], [P2], [S1], [S3], [Th] y [T2].

Finalmente la sección 1.7 está dedicada a las transformaciones de Möbius y su representación mediante números de Clifford. Se incluye también la definición y algunas propiedades de los grupos de Hecke. Para esta sección referimos a [A4], [A5], [B], [E], [MWW], y [Ro].

### 1.1. Superficies de Riemann. Métrica de Poincaré.

Una *superficie de Riemann*  $\mathcal{R}$  es una variedad compleja conexa de dimensión uno. En particular todo dominio plano es de forma natural una superficie de Riemann.

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann y  $(R_0, \pi)$  su cubrimiento universal (único salvo aplicaciones biholomorfas). Definimos el grupo de cubrimiento  $G$  asociado a  $\pi$  como el grupo de homeomorfismos  $g : R_0 \rightarrow R_0$  tales que  $\pi \circ g = \pi$ . Este grupo actúa sobre  $R_0$  discontinuamente, es decir, para todo  $p \in R_0$  existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ , para todo  $g \in G \setminus \{id\}$ . Como  $\pi$  es un homeomorfismo local podemos dotar a  $R_0$  de una estructura de superficie de Riemann caracterizada por hacer a  $\pi$  holomorfa. Entonces todos los elementos de  $G$  son claramente biholomorfos y  $\mathcal{R}$  es biholomorfa a  $R_0/G$ . Por tanto  $\mathcal{R} \cong R_0/G$  con  $G$  un subgrupo de las transformaciones biholomorfas de  $R_0$  en  $R_0$ ,  $\text{Aut}(R_0)$ , y que actúa de manera discontinua.

Un teorema fundamental de la teoría de superficies de Riemann es el teorema de uniformización de Koebe y Poincaré que enunciamos a continuación.

**Teorema de uniformización.** *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa al disco unidad  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , el plano complejo  $\mathbb{C}$  o la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .*

Este teorema nos dice que  $R_0$  es biholomorfo con  $\Delta$ ,  $\mathbb{C}$ , ó  $\hat{\mathbb{C}}$ .



Si  $\mathcal{R}_0 \cong \hat{\mathbb{C}}$ , entonces el grupo  $\text{Aut}(\mathcal{R}_0)$  está formado por las transformaciones de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc \neq 0,$$

donde  $T(\infty) = \frac{a}{c}$  y  $T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ . Como todas estas transformaciones tienen puntos fijos se tiene que  $G = \{id\}$  y que  $\mathcal{R} \cong \hat{\mathbb{C}}$ .

Si  $\mathcal{R}_0 \cong \mathbb{C}$ , entonces  $\text{Aut}(\mathcal{R}_0) = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}\}$ . El único punto fijo puede ser infinito y por tanto  $G$  sólo puede incluir transformaciones de la forma  $z + b$ . Además como  $G$  debe actuar discontinuamente las únicas tres posibilidades son  $G = \{id\}$ ,  $G = \langle z + b \rangle$ , con  $b \neq 0$  ó  $G = \langle z + b_1, z + b_2 \rangle$  con  $\frac{b_2}{b_1} \notin \mathbb{R}$ ; así que en estos casos obtenemos  $\mathcal{R} \cong \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{R} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ó que  $\mathcal{R}$  es un toro.

A una superficie  $\mathcal{R}$  cuyo cubrimiento universal es  $\mathbb{C}$  ó  $\hat{\mathbb{C}}$  se le dice *excepcional* y como hemos visto será biholomorfa a  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  o a un toro.

El grupo de automorfismos de  $\Delta$ ,  $\text{Aut}(\Delta)$ , coincide con el grupo Möb( $\Delta$ ) de transformaciones de Möbius que llevan  $\Delta$  sobre  $\Delta$  y conservan orientación, que se describe como

$$\text{Möb}(\Delta) = \left\{ e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} : \theta \in \mathbb{R}, a \in \Delta \right\}.$$

Un hecho fundamental es que estas transformaciones son precisamente las isometrías del disco dotado de la métrica de Poincaré

$$ds = \frac{4|dz|}{1 - |z|^2}$$

y que conservan orientación.

Esta métrica es la única métrica en  $\Delta$  conforme con la euclídea, completa y de curvatura constante  $-1$ . A la distancia asociada a esta métrica la denotamos  $\rho_\Delta$ . Las geodésicas son los arcos de círculos ortogonales a  $\partial\Delta$ , en particular las geodésicas que pasan por 0 son los diámetros. El disco con esta métrica es el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica.

Si  $\mathcal{R}$  es una superficie de Riemann no excepcional y  $(\Delta, \pi)$  es su cubrimiento universal, entonces  $\mathcal{R} \cong \Delta/G$  con  $G$  un subgrupo discontinuo de Möb( $\Delta$ ). Recíprocamente, si  $G$  es un subgrupo discreto de Möb( $\Delta$ ), entonces  $\Delta/G$  es una superficie de Riemann. Si permitimos que  $G$  tenga puntos fijos entonces la métrica hiperbólica en  $\Delta/G$  tendrá singularidades, pero el cociente será aún una superficie de Riemann.

Como  $G$  es un grupo de isometrías de  $\Delta$  podemos proyectar por medio de  $\pi$  la métrica de Poincaré de  $\Delta$  en  $\mathcal{R}$  de forma que  $\pi$  sea una isometría local. La métrica en  $\mathcal{R}$  se denomina métrica de Poincaré de  $\mathcal{R}$  y es una métrica completa de

curvatura constante  $-1$ . Llamaremos *hiperbólicas* a las superficies de Riemann no excepcionales con la métrica de Poincaré. La distancia asociada que denotaremos por  $dist$  es la distancia cociente

$$dist(p, q) = \inf \{ \rho_{\Delta}(z, w) : z, w \in \Delta, \pi(z) = p, \pi(w) = q \}$$

Recíprocamente, si  $(\mathcal{R}, g)$  es una variedad Riemanniana bidimensional, completa, de curvatura  $-1$ , usando coordenadas isotérmicas se puede dotar a  $\mathcal{R}$  de una estructura de superficie de Riemann con métrica de Poincaré  $g$ .

La transformación

$$T(z) = i \frac{1+z}{1-z}$$

lleva el disco  $\Delta$  en el semiplano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z : \text{Im } z > 0\}$ . La métrica de Poincaré en  $\Delta$  se transforma en la métrica de Poincaré en  $\mathbb{H}^2$

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im } z}.$$

Las geodésicas son los arcos de circunferencia perpendiculares a  $\mathbb{R}$  y las rectas verticales.

En este caso las isometrías que conservan orientación son las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{H}^2$  que conservan  $\mathbb{H}^2$  y que se describen como

$$\text{Möb}(\mathbb{H}^2) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\} / \{\pm id\}.$$

Las transformaciones de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  se clasifican de acuerdo al número de puntos que fijan en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Sea  $T(z) \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ .

- (i) Si  $T$  fija un único punto  $\alpha$  decimos que la transformación  $T$  es *parabólica*. Esto ocurre si y sólo si  $T$  es conjugada a la transformación  $z \mapsto z+1$ . Obsérvese que  $T^n(z) \rightarrow \alpha$  cuando  $|n| \rightarrow \infty$ .
- (ii) Si  $T$  fija dos puntos conjugados  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  decimos que es *elíptica*. En este caso  $T$  es conjugada en  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  a la transformación  $z \mapsto kz$  con  $|k|=1$  y  $k \neq 1$ .
- (iii) Si  $T$  deja fijos dos puntos  $\alpha$  y  $\beta$  en  $\mathbb{R}$  decimos que es *hiperbólica*. La transformación  $T$  es conjugada a  $z \mapsto kz$  con  $|k| \neq 1$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Para todo  $z \neq \alpha, \beta$  los puntos  $T^n(z)$  son distintos y se acumulan en  $\alpha$  o  $\beta$  dependiendo si  $|k| < 1$  o  $|k| > 1$ .

En ocasiones es mas conveniente representar las superficies hiperbólicas como cocientes de  $\mathbb{H}^2$  por subgrupos discontinuos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ .

Si  $\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G$  con  $G$  un grupo finitamente generado entonces  $\mathcal{R}$  puede obtenerse a partir de una superficie de Riemann compacta quitando  $m$  puntos distintos y  $n$  dominios de Jordan disjuntos. Recordemos que todo subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  finitamente generado tiene un dominio fundamental con un número finito de lados, es decir, es un grupo geoméricamente finito.

Una superficie hiperbólica  $\mathcal{R}$  se puede descomponer en una unión disjunta

$$\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G \cong X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_{\ell} \cup \bigcup_{s=1}^n Z_s,$$

donde  $X_0$  es compacta, cada  $Y_{\ell}$  es isométrico a  $S^1 \times [\log 2\pi, +\infty)$  con la métrica  $dr^2 + e^{-2r} d\theta^2$  y cada  $Z_s$  es isométrico a  $S^1 \times [a_s, +\infty)$ , para algún  $a_s > 0$ , con la métrica  $dr^2 + \cosh^2 r d\theta^2$ .



Figura 1

Llamaremos a los  $Y_{\ell}$ 's *cúspides* y a los  $Z_s$ 's *foniles*. Obsérvese que el ínfimo de las longitudes de los lazos en la clase de homotopía libre de cada cúspide es cero, mientras que en los foniles es igual a la longitud de la geodésica simple cerrada que limita el fonil, es decir,  $2\pi \cosh a_s$ .

Para cada cúspide  $Y$  existe una transformación parabólica  $g_0 \in G$  con punto fijo  $p \in \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^2$ , y una transformación de Möbius  $T$  que verifican

- (i)  $T(\infty) = p$ , y además  $T^{-1} \circ g_0 \circ T$  es la transformación  $z \mapsto z + 1$ .



- (ii) Existe un semiplano  $A_c = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > c\}$  tal que la imagen de  $T(A_c)$  por la proyección canónica  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G$  es homeomorfa a  $Y$ .

Nos referiremos a  $Y$  como la cúspide en  $p$ .

Además, un teorema de H. Shimizu (ver e.g. [K]) nos dice que para  $c = 1$  y  $\tilde{G} = T^{-1} \circ G \circ T$ , el conjunto

$$\{\tilde{g}(A_1) : \tilde{g} \in \tilde{G} \setminus \{\tilde{g} : \tilde{g}(\infty) = \infty\}\}$$

es una familia numerable de bolas euclídeas disjuntas contenidas en  $\mathbb{H}^2$  con diámetros menores o iguales que 1. Por esto la longitud de la frontera finita de cada cúspide es uno. Estas bolas son tangentes a  $\mathbb{R}$  en ciertos puntos base  $a_i$  donde

$$a_i = (T^{-1} \circ g_i \circ T)(\infty) \quad \text{para algún } g_i \in G \setminus \{g \in G : g(p) = p\}.$$

Nos referiremos a estas bolas como las *horobolas asociadas a la cúspide*  $Y$ .

## 1.2. Variedades hiperbólicas.

El modelo hiperbólico de Poincaré tiene un análogo en dimensión superior. La bola unidad  $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$  dotada de la métrica Riemanniana

$$ds = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}$$

es una variedad Riemanniana completa de curvatura seccional constante  $-1$ . Las geodésicas son arcos de círculos perpendiculares a  $\partial\mathbb{B}^d$  y el grupo de isometrías que conservan orientación es el grupo de Möbius de  $\mathbb{B}^d$ ,  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$ . Recordemos que una transformación de Möbius de  $\hat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  es una composición finita de reflexiones en planos o esferas y el grupo formado por las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{R}^d$  que conservan orientación es el grupo de Möbius de  $\mathbb{R}^d$  que denotaremos por  $\text{Möb}(\mathbb{R}^d)$ . El grupo de Möbius de  $\mathbb{B}^d$ , es el subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{R}^d)$  formado por las transformaciones que preservan  $\mathbb{B}^d$ .

Un modelo alternativo es el semiespacio

$$\mathbb{H}^{d+1} = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} > 0\}$$

con la métrica hiperbólica  $d\lambda = \frac{|dx|}{x_{d+1}}$ . En este caso las geodésicas son los arcos de círculos y las rectas perpendiculares al plano  $\{x_{d+1} = 0\}$ , y el grupo de las isometrías que conservan orientación es el grupo de Möbius de  $\mathbb{H}^{d+1}$ ,  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ , que es el subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{R}^{d+1})$  formado por las transformaciones que preservan el semiespacio  $\mathbb{H}^{d+1}$ .

Una *variedad hiperbólica*  $\mathcal{M}$  es una variedad Riemanniana con curvatura seccional constante negativa.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad hiperbólica y  $(\mathcal{M}_0, \pi)$  su cubrimiento universal. Entonces  $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_0/G$  con  $G$  un subgrupo discontinuo del grupo de automorfismos de  $\mathcal{M}_0$ .

El teorema de uniformización para variedades hiperbólicas nos dice que el semiespacio  $\mathbb{H}^{d+1}$  con la métrica hiperbólica es salvo isometrías y un factor conforme constante la única variedad hiperbólica simplemente conexa. Por tanto salvo un factor conforme constante  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  con  $G$  un subgrupo discontinuo de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ .

Las transformaciones  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  se clasifican de manera similar al caso  $d = 1$ .

- (i) Si  $T$  es conjugada a una transformación de la forma  $x \mapsto A(x) + a$  con  $A$  una matriz ortogonal y  $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , decimos que la transformación es *parabólica*.
- (ii) Si  $T$  es conjugada a una transformación de la forma  $x \mapsto A(x)$  con  $A \neq id$  y ortogonal decimos que es *elíptica*.
- (iii) Si  $T$  es conjugada a una transformación de la forma  $x \mapsto \lambda A(x)$ , donde  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ , y  $A$  es ortogonal decimos que es *loxodrómica*. En particular, cuando  $A = id$  decimos que  $T$  es *hiperbólica*.

Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . Para todo  $x \in \mathbb{H}^{d+1}$  denotamos por  $\Lambda(x)$  el conjunto de los puntos de acumulación de la órbita del punto  $x$ . Como las transformaciones de  $G$  son isometrías para la métrica hiperbólica es claro que  $\Lambda(x) = \Lambda(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{H}^{d+1}$ . El *conjunto límite*  $\Lambda(G)$  es el conjunto de los puntos de acumulación de alguna órbita.

Supongamos que el grupo  $G$  tiene elementos parabólicos. Si  $p$  es un punto fijo parabólico de algún elemento de  $G$  decimos que un abierto  $U \subset \mathbb{H}^{d+1}$  es un *entorno cuspidal* de  $p$  si existe  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  tal que  $T(p) = \infty$  y además se verifica:

- (i)  $T(U) = \overline{\mathbb{H}^{d+1}} \setminus (\mathbb{R}^k \times \mathbb{B}^{d+1-k})$  donde  $\mathbb{B}^{d+1-k}$  es la bola unidad de  $\mathbb{R}^{d+1-k}$ .
- (ii)  $\overline{U} \cap \Lambda(G) = \{p\}$ .
- (iii)  $g(U) = U$  para todo  $g \in G_p$ , y  $g(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G \setminus G_p$ , donde  $G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$ .

Llamaremos *cúspide* a la proyección de  $U$  en  $\mathbb{H}^{d+1}/G$ . El número  $k$  se llama *rango de la cúspide*.

Obsérvese que  $T^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{d+1}) : x_{d+1} > 1\})$  es una horobola con punto base  $p$ . Las imágenes por  $G$  de esta horobola forman una familia de horobolas disjuntas. Nos referiremos a ellas como a las *horobolas asociadas a la cúspide* en  $p$ .

Sea  $G$  es un grupo geoméricamente finito, es decir, existe un poliedro (hiperbólico) abierto  $P$  con un número finito de lados que verifica: i) Las imágenes por  $G$  de la clausura de  $P$  cubre  $\mathbb{H}^{d+1}$ ; ii) Las imágenes  $g(P)$  son disjuntas dos a dos. Entonces, el espacio cociente  $\mathcal{M}_G = H(\Lambda(G))/G$  donde  $H(\Lambda(G))$  denota la envolvente convexa en  $\mathbb{H}^{d+1}$  del conjunto límite, se puede descomponer en la siguiente unión disjunta

$$\mathcal{M}_G = X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell,$$

donde  $X_0$  es compacto y los  $Y_\ell$ 's son cúspides.

### 1.3. Dimensión de Hausdorff y $\mu$ -dimensión.

En los problemas de aproximación aparecen de forma natural conjuntos de medida de Lebesgue cero. El concepto de dimensión de Hausdorff nos permite medir el tamaño de estos conjuntos y así distinguir entre ellos.

Sea  $A \subset \mathbb{R}^d$  y  $s > 0$ . Un  $s$ -cubrimiento de  $A$  es una familia  $\{B(x_i, r_i)\}$  de bolas en  $\mathbb{R}^d$  con radios  $r_i \leq s$  que cubren el conjunto  $A$ .

Para todo  $\alpha > 0$  definimos

$$H_{\alpha,s}(A) = \inf \left\{ \sum r_i^\alpha : \{B(x_i, r_i)\} \text{ un } s\text{-cubrimiento de } A \right\}$$

El valor de  $H_{\alpha,s}(A)$  decrece con  $s$  y, por tanto, el límite

$$H_\alpha(A) = \lim_{s \rightarrow 0} H_{\alpha,s}(A)$$

existe. Este límite se llama la *medida de Hausdorff  $\alpha$ -dimensional*.

La *dimensión de Hausdorff* de  $A$ , denotada por  $DH(A)$ , se define como

$$DH(A) = \sup \{ \alpha : H_\alpha(A) > 0 \} = \inf \{ \alpha : H_\alpha(A) = 0 \}$$

Es fácil comprobar (ver e.g. [KS]) que

$$H_\alpha(A) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha < DH(A), \\ 0, & \text{si } \alpha > DH(A). \end{cases}$$

Por tanto si  $0 < H_\beta(A) < +\infty$ , entonces  $DH(A) = \beta$ :

La dimensión de Hausdorff se puede definir de forma alternativa usando la noción de  $\alpha$ -contenido.



El  $\alpha$ -contenido de  $A$ , denotado por  $M_\alpha(A)$ , se define como

$$M_\alpha(A) = \inf \left\{ \sum r_i^\alpha : \{B(x_i, r_i)\} \text{ un cubrimiento por bolas de } A \right\}$$

Es claro que

$$M_\alpha(A) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad H_\alpha(A) = 0$$

y por tanto

$$DH(A) = \inf \{ \alpha : M_\alpha(A) = 0 \} = \sup \{ \alpha : M_\alpha(A) > 0 \}$$

El  $\alpha$ -contenido no es una medida. Sin embargo, (ver e.g. [T], [C]).

**Lema (Frostman).** Si  $M_\alpha(A) > 0$  y  $A$  es cerrado, existe una medida positiva  $\nu$  tal que

- (i)  $M_\alpha(A) = \|\nu\|$  (la masa total de  $\nu$ ),
- (ii)  $\nu(B(x, r)) \leq c r^\alpha$ , para toda bola  $B(x, r)$ .

Recíprocamente si existe una medida positiva  $\nu$  con soporte en  $A$  verificando (ii), entonces para todo cubrimiento por bolas  $\{B(x_i, r_i)\}$  de  $A$  se tiene que

$$\nu(A) \leq c \sum r_i^\alpha,$$

y, en consecuencia,  $M_\alpha(A) > (1/c) \nu(A)$ .

Esto da un procedimiento efectivo para estimar inferiormente la dimensión de Hausdorff de  $A$ : construir una medida positiva con soporte en  $A$ , verificando (ii) y con  $\nu(A) > 0$ .

Sea  $\mu$  una medida positiva en  $\mathbb{R}^d$  y  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Definimos el  $(\alpha, \mu)$ -contenido de  $A$ , denotado por  $M_\alpha^\mu(A)$ , como

$$M_\alpha^\mu(A) = \inf \left\{ \sum (\mu(B_i))^\alpha : \{B_i\} \text{ un cubrimiento por bolas de } A \right\}.$$

La  $\mu$ -dimensión de  $A$ ,  $DH^\mu(A)$ , se define como

$$DH^\mu(A) = \inf \{ \alpha : M_\alpha^\mu(A) = 0 \} = \sup \{ \alpha : M_\alpha^\mu(A) > 0 \}.$$

Obsérvese que si  $\mu$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $M_\alpha^\mu(A) = c_n M_{n\alpha}(A)$  y  $DH_\mu(A) = n DH(A)$ .

Una propiedad útil y que se comprueba fácilmente es la siguiente.

Si  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  con  $A_k \subset A_{k+1}$ , entonces

$$DH(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} DH(A_k) \quad y \quad DH_{\mu}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} DH^{\mu}(A_k).$$

#### 1.4. Algunos teoremas de la teoría métrica de aproximación diofántica.

El grupo modular  $G = SL(2, \mathbb{Z})$  actuando sobre  $\mathbb{H}^2$  está generado por las transformaciones

$$z \mapsto z + 1 \quad y \quad z \mapsto \frac{-1}{z}.$$

El infinito es un punto fijo parabólico de la transformación  $z \mapsto z + 1$ , y la familia  $\mathcal{H} = \{g(A) : g \in G, g(\infty) \neq \infty\}$  con  $A = \{z : \operatorname{Im} z > 1\}$  está formada por horodiscos disjuntos, de forma que si

$$g = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix},$$

entonces  $g(A)$  es un horodisco con punto base  $p/q$  y radio  $1/(2q^2)$ ; como  $ps - qr = 1$  la fracción  $p/q$  es irreducible. Estos horodiscos son los horodiscos asociados a la cúspide en infinito y forman un empaquetamiento de círculos.

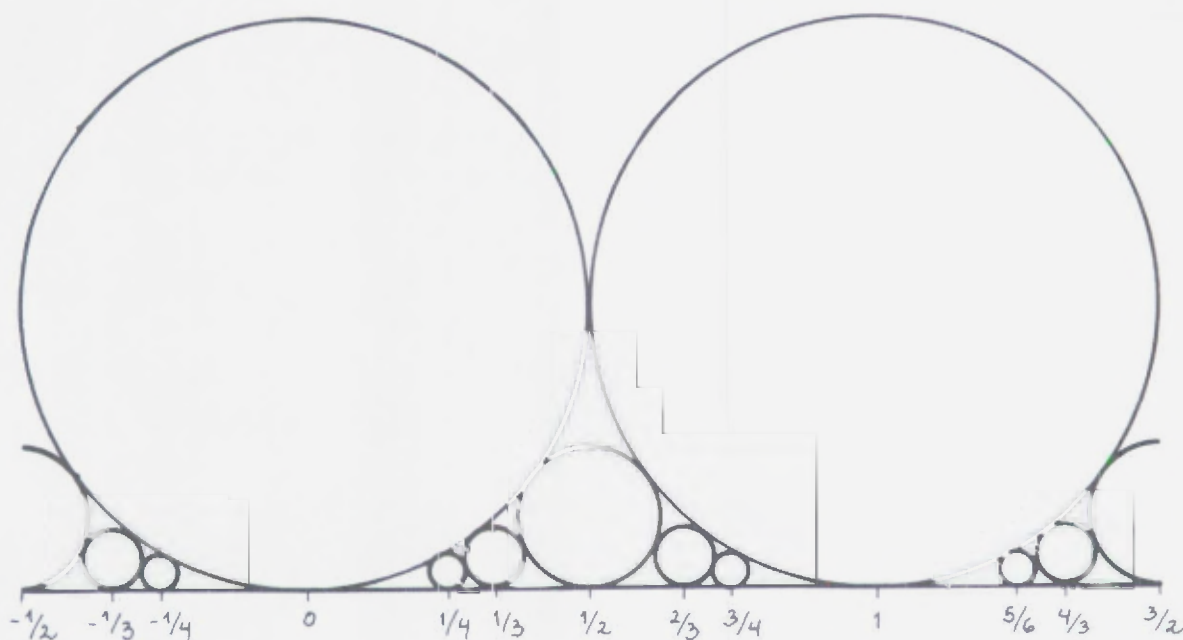


Figura 2



Si  $\xi$  es un irracional la línea vertical  $L_\xi$  con punto final  $\xi$  intersecta a infinitos horodiscos de  $\mathcal{H}$  pero no es tangente a ninguno, por tanto hay una sucesión de racionales  $p_n/q_n$  con m.c.d.  $(p_n, q_n) = 1$  tales que

$$(1.1) \quad \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{c}{q_n^2}, \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{2}.$$

De hecho, Hurwitz demostró que el mejor valor de  $c$  es  $1/\sqrt{5}$  (ver e.g. [Fo]).

Una región fundamental para el grupo modular actuando en  $\mathbb{H}^2$  es la región de puntos en  $\mathbb{H}^2$  verificando

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |z| \geq 1$$

El cociente  $\mathcal{R} = \mathbb{H}^2/G$ , conocido como la *superficie modular*, es como superficie de Riemann el plano complejo, y el cubrimiento se ramifica sobre dos puntos con órdenes 2 y 3. Los horodiscos de  $\mathcal{H}$  se proyectan en una región en  $\mathcal{R}$  que llamaremos la cúspide en infinito.

Al proyectar la métrica hiperbólica, se obtiene una métrica con dos singularidades. Fijemos un punto  $p$  en  $\mathcal{R}$  y un levantamiento  $\tilde{p}$  en  $\mathbb{H}^2$  de  $p$  y denotemos por  $S(p)$  la esfera unidad en  $T_p\mathcal{R}$ , el espacio tangente en  $p$ . La geodésica  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}$  en  $\mathbb{H}^2$  que parte de  $\tilde{p}$  y tiene punto final  $\xi \in \mathbb{R}$  se proyecta en una geodésica  $\gamma_{p,v(\xi)}$  en  $\mathcal{R}$  con punto inicial  $p$  y con cierta dirección  $v(\xi) \in S(p)$ . A partir de un tiempo  $t$  suficientemente grande la geodésica  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}$  es comparable a la geodésica vertical  $L_\xi$ , por tanto (1.1) nos dice que para casi toda dirección  $v \in S(p)$  la geodésica  $\gamma_{p,v}$  entra infinitas veces en la cúspide. Además una geodésica  $\gamma_{p,v}$  diverge a infinito si su correspondiente levantamiento tiene punto final en un racional. Por tanto también se tiene que el conjunto de geodésicas que parten de  $p$  y divergen a infinito es numerable.

Vemos, por tanto, que ciertos resultados de aproximación diofántica pueden ser interpretados geoméricamente de esta manera como enunciados sobre geodésicas en la superficie modular.

Un resultado clásico de Khintchine es el siguiente.

**Teorema** (Khintchine). *Para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$  existe una sucesión de racionales  $p/q$ , con m.c.d.  $(p, q) = 1$  tales que*

$$(1.2) \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2 \log q}.$$

De hecho si  $F(x)$  es una función tal que  $F(x)/x$  es decreciente también se tiene que, para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ , se verifica

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{F(q)}{q},$$

para infinitas fracciones  $p/q$  irreducibles, si y sólo si  $\sum_n F(n) = \infty$ .

Recordemos que los horodiscos correspondientes a la cúspide tienen puntos base  $p/q$  y radios  $1/(2q^2)$ . Por tanto (1.2) nos dice que para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$  existe una sucesión de horobolas  $\{H_i = H(a_i, R_i)\}$  tales que para todo  $i$  la distancia de  $\xi$  al punto base  $a_i$  de  $H_i$  está controlada por  $\Psi(R_i^{-1})R_i$ , donde  $R_i$  es el radio del horodisco  $H_i$  y

$$\Psi(r) = \frac{4}{\log(x/2)}.$$

Este resultado fue generalizado por D. Sullivan para subgrupos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  de volumen finito y con elementos parabólicos. En términos de geodésicas se puede enunciar de la siguiente forma.

**Teorema (Sullivan).** Si  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  con  $G$  un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ ,  $\mathcal{M}$  de volumen finito y no compacta, entonces, para casi toda dirección  $v \in S(p)$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{p,v}(t), p)}{\log t} = \frac{1}{d}.$$

Recordemos que  $\text{dist}$  es la distancia en  $\mathcal{M}$ . Por supuesto en el caso compacto se tiene que este límite superior es cero para toda dirección.

Otro resultado clásico de aproximación diofántica es el siguiente teorema de Jarník y Besicovitch.

**Teorema (Jarník-Besicovich).** Para cada  $\tau > 1$  el conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}$  tales que se verifica

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2\tau}},$$

para infinitos  $p/q \in \mathbb{Q}$  con  $p$  y  $q$  primos relativos, tiene dimensión de Hausdorff igual a  $1/\tau$ .

En términos geométricos el teorema de Jarník-Besicovich nos dice que para  $0 < \alpha < 1$  el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica correspondiente  $\gamma_{p,v}$  en  $\mathcal{R} = \mathbb{H}^2/SL(2, \mathbb{Z})$  verifica que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{p,v}(t), p)}{t} \geq \alpha,$$

tiene dimensión de Hausdorff  $1/\tau$ . (Ver el capítulo 3)

Este teorema fue generalizado por A. Baker y W. Schmidt en [BS] para obtener resultados de aproximación en  $\mathbb{R}$  por números algebraicos de altura acotada.

**Teorema [BS].** *Para todo  $\lambda \geq 1$ , y todo entero positivo  $n$ , el conjunto de los  $\xi \in \mathbb{R}$  tales que para algún  $\lambda' < \lambda$  existen infinitos números algebraicos  $\alpha$  de altura menor o igual que  $n$ , y que verifican*

$$|\xi - \alpha| < \frac{1}{H(\alpha)^{(n+1)\lambda'}},$$

donde  $H(\alpha)$  es la altura de  $\alpha$ , es decir, el máximo de los valores absolutos de los coeficientes enteros primos relativos de su polinomio minimal.

Para obtener este resultado, Baker y Schmidt introdujeron la noción de *sistema regular*. Un sistema regular es un conjunto numerable  $A \subset \mathbb{R}$  y una función positiva  $F$ , definida en  $A$ , con ciertas propiedades que garantizan la equidistribución en todo intervalo de  $\mathbb{R}$  de los elementos de  $A$  sobre los que la función  $F$  toma valores comparables.

**Definición.** *Un conjunto numerable  $A$  de números reales junto con una función positiva  $F$  definida en  $A$  es un sistema regular  $(A, F)$ , si para todo intervalo  $I$  existe un número positivo  $K(I)$ , tal que, para todo  $K \geq K(I)$ , existen elementos  $a_1, \dots, a_t \in A$  tales que, para todo  $j, k$  con  $1 \leq j, k \leq t$  ( $j \neq k$ ), se tiene que*

$$a_j \in I, \quad F(a_j) \leq K, \quad |a_j - a_k| \geq K^{-1}, \quad t \geq c_1 m(I) K,$$

donde  $c_1 = c_1(A, F) > 0$  y  $m$  denota la medida de Lebesgue.

Un ejemplo básico de sistema regular es  $A = \mathbb{Q}$  y  $F(p/q) = q^2$ , ó los racionales diádicos  $r + p/2^n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , y  $p$  un entero impar) y  $F(r + p/2^n) = 1/2^n$ .

En [BS] se demuestra que si  $\Phi(x)$  es una función positiva verificando que  $\Phi(x) \leq 1/(2x)$ , entonces, para todo  $\alpha$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (\Phi(x))^\alpha = \infty,$$

el conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}$  para los cuales existen infinitos  $a \in A$  tales que

$$|\xi - a| < \Phi(F(a)),$$

tiene dimensión de Hausdorff mayor o igual que  $\alpha$ .

Una generalización del concepto de sistema regular a dimensión superior aparece en [MP], nuevamente con el objetivo de obtener cotas inferiores de la dimensión de Hausdorff.

Otra técnica utilizada para estimar inferiormente la dimensión de Hausdorff es la noción de *sistema ubicuo* debida a M.M. Dodson, B. P. Rynne y J.A.G. Vickers [DRV].

**Definición.** Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $S = \{S_\alpha \subset \Omega\}_{\alpha \in J}$  una familia de conjuntos no vacíos y  $\mu$  una función positiva definida en  $J$ .

Para todo entero  $N > 0$  definimos  $J(N) = \{\alpha \in J : \mu(\alpha) \leq N\}$  y, para  $\alpha \in J$  y  $\rho > 0$ , definimos

$$S_\alpha(\rho) = \{x \in \Omega : |x - S_\alpha| < \rho\}.$$

Sea  $\lambda : N \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función decreciente con

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(N) = 0$$

y denotemos por  $m$  la medida de Lebesgue.

Entonces el sistema  $(S, \mu)$  es ubicuo con respecto a  $\lambda$  si existe una constante  $k$ , con  $0 \leq k < d$ , y, para todo entero  $N > 0$  existe un conjunto medible Lebesgue  $A(N) \subset \Omega$ , tales que

$$(i) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} m(\Omega \setminus A(N)) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Para cualquier cubo } C \subset \Omega \text{ con lado } l(C) = \lambda(N) \text{ y } \frac{1}{2}C \cap A(N) \neq \emptyset, \text{ existe } \alpha \in J(N) \text{ tales que, para todo } 0 < \rho \leq \lambda(N),$$

$$m(C \cap S_\alpha(\rho)) > c\rho^{d-k}l(C)^k,$$

y, para cualquier cubo  $C' \subset \Omega$  con  $l(C') \leq \lambda(N)$ ,

$$m(C' \cap C \cap S_\alpha) < c'\rho^{d-k}l(C)^k,$$

con  $c, c'$  constantes positivas.

Sea  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función decreciente con  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$ . Definimos

$$\gamma = \min\left\{1, \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda(N)}{\log \Phi(N)}\right\}.$$

En [DVR] se demuestra que si  $(S, \mu)$  es un sistema ubicuo con respecto a  $\lambda$ , entonces el conjunto de puntos  $x \in \Omega$  que verifican

$$\inf\{|x - s_\alpha| : s_\alpha \in S_\alpha\} < \Phi(\mu(\alpha)),$$



para infinitos  $\alpha \in J$ , tiene dimensión de Hausdorff mayor o igual que  $k + \gamma(d - k)$ .

Una generalización de sistema ubicuo para otras medidas aparece en [DMPV], de nuevo con el objetivo de estimar inferiormente la dimensión de Hausdorff.

Finalmente, recordemos otro resultado clásico debido a Jarník.

**Teorema (Jarník).** *La dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}$  tales que*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\xi)}{q^2},$$

*para todo  $p/q \in \mathbb{Q}$  con m.c.d.  $(p, q) = 1$ , es uno.*

En términos geométricos este teorema nos dice que en la superficie modular el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}$  permanece acotada tiene dimensión de Hausdorff uno.

Este resultado ha sido generalizado por S.J. Patterson en [F1] para superficies de Riemann de área finita y por S.G. Dani en [D1] para variedades hiperbólicas de volumen finito. La clave de la demostración de Dani es probar que el conjunto de las direcciones correspondientes a las geodésicas acotadas es un conjunto  $\alpha$ -ganador para una versión métrica de un juego de Banach-Mazur introducida por W.M. Schmidt en [Sch1]. Schmidt había demostrado que los conjuntos  $\alpha$ -ganadores tenían dimensión de Hausdorff plena.

El juego de Schmidt tiene lugar en un espacio métrico completo  $X$  e involucra a dos jugadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y dos números  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ . El jugador  $\mathcal{B}$  empieza el juego escogiendo una bola cerrada  $B_0$  en  $X$ . Entonces el jugador  $\mathcal{A}$  escoge una bola cerrada  $A_0$  contenida en  $B_0$  y de radio  $\alpha$  veces el radio de  $B_0$ . A continuación el jugador  $\mathcal{B}$  escoge una bola cerrada  $B_1$  contenida en  $A_0$  y de radio  $\beta$  veces el radio de  $A_0$  y así sucesivamente. Como  $X$  es completo la intersección de los  $B_k$ 's (o equivalentemente los  $A_k$ 's) es un punto de  $X$ . Un subconjunto  $S$  de  $X$  es un conjunto  $(\alpha, \beta)$ -ganador si el jugador  $\mathcal{A}$  tiene una estrategia de juego que fuerce al punto de intersección a pertenecer a  $S$ . Un conjunto  $S$  es un conjunto  $\alpha$ -ganador si es  $(\alpha, \beta)$ -ganador para toda  $\beta \in (0, 1)$ .

### 1.5. Conjuntos límite de un grupo Kleiniano.

Si  $G$  es un subgrupo discreto de Möb  $(\mathbb{B}^d)$  definimos *el conjunto límite* de  $G$  que denotaremos por  $\Lambda(G)$ , como el conjunto formado por los puntos de acumulación de la órbita del cero. Como las transformaciones de  $G$  son isometrías para la métrica hiperbólica es fácil ver que para todo  $x \in \mathbb{B}^d$  los puntos de acumulación de la órbita

de  $x$  coinciden con los puntos de acumulación de la órbita del 0 y se obtiene el mismo conjunto límite.

El conjunto límite  $\Lambda(G)$  está contenido en  $\partial\mathbb{B}^d$  y tiene uno, dos o ningún punto o es un conjunto perfecto. Los grupos cuyo conjunto límite es finito son llamados elementales y pueden ser clasificados. Si  $G$  no es elemental  $\Lambda(G)$  es el mínimo conjunto cerrado  $G$ -invariante en  $\overline{\mathbb{B}}^d$  (o  $\partial\mathbb{B}^d$ ).

En lo que sigue supondremos que  $G$  es un grupo no elemental.

El conjunto límite  $\Lambda(G)$  puede ser  $\partial\mathbb{B}^d$  pero si esto no ocurre es un conjunto totalmente desconexo y denso en ninguna parte.

L. Ahlfors conjeturó en [A2] que para todo subgrupo finitamente generado de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$ , ( $d \geq 3$ ), el conjunto límite tiene medida cero o es todo  $\partial\mathbb{B}^d$ . En [A3] demostró que esto es cierto para todo subgrupo geoméricamente finito de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$  con  $d \geq 3$  (para  $d = 2$  esto ya había sido probado por Siegel). W. Thurston probó en [Th] la conjetura de Ahlfors para ciertos límites de grupos geoméricamente finitos.

Recordamos que un subgrupo  $G$  de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$  es *geoméricamente finito* si es discreto y tiene un poliedro fundamental con un número finito de lados. En dimensión dos esto equivale a que  $G$  sea finitamente generado, pero no si  $d \geq 3$ . Ejemplos de grupos finitamente generados y geoméricamente infinitos han sido dados por L. Greenberg, L. Bers, B. Maskit y T. Jorgensen (ver *e.g.* [G]).

Si  $\xi$  es un punto en  $\partial\mathbb{B}^d$  y  $0 < \alpha < \pi/2$  definimos el *cono de Stolz* en  $\xi$  de apertura  $\alpha$  como el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{B}^d$  tales que el ángulo entre los vectores  $\xi$  y  $\xi - x$  es menor o igual que  $\alpha$  y  $|x - \xi| < 2 \cos \alpha$ .

Un subconjunto importante del conjunto límite es el *conjunto límite cónico*, denotado por  $\Lambda_c(G)$ . Un punto límite  $\xi$  es un *punto límite cónico* si existe una sucesión de la órbita del cero que permanece dentro de un cono de Stolz en  $\xi$ . Esta condición es equivalente a que exista una sucesión  $\{g_n\} \subset G$  tal que

$$\frac{|\xi - g_n(0)|}{1 - |g_n(0)|} < c,$$

donde  $c$  es una constante positiva.

Una forma de calibrar el tamaño de la órbita de  $G$  es estudiar la convergencia o divergencia de la serie

$$(1.3) \quad \sum_{g \in G} (1 - |g(0)|)^s$$

para diferentes potencias  $s$ .

Denotemos por  $\rho(\cdot, \cdot)$  la distancia hiperbólica en  $\mathbb{B}^d$ . Como

$$\rho(0, g(0)) = \log \frac{1 + |g(0)|}{1 - |g(0)|},$$

es claro que la serie (1.3) y la serie

$$\sum_{g \in G} e^{-s \rho(0, g(0))}$$

convergen o divergen simultáneamente.

Definimos el *exponente de convergencia* de  $G$ ,  $\delta(G)$ , como

$$\delta(G) = \inf \{s > 0 : \sum_{g \in G} (1 - |g(0)|)^s < \infty\} = \inf \{s > 0 : \sum_{g \in G} e^{-s \rho(0, g(0))} < \infty\}.$$

Es fácil comprobar, como consecuencia de que  $\rho(g(0), h(0)) \geq c_G$  para todos  $g, h \in G$ , que  $\delta(G) \leq d - 1$  (ver e.g. [Ts, p. 517]).

El exponente de convergencia  $\delta(G)$  está relacionado estrechamente con el tamaño de los conjuntos  $\Lambda(G)$  y  $\Lambda_c(G)$ .

Para todo subgrupo discreto se demuestra que  $DH(\Lambda_c(G)) \leq \delta(G)$ , donde  $DH$  denota la dimensión de Hausdorff. Sin embargo la desigualdad opuesta requiere más condiciones sobre el grupo  $G$ . S.J. Patterson demostró en [P2] que si  $G$  es un subgrupo finitamente generado de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^2)$ , entonces  $DH(\Lambda(G)) \geq \delta(G)$ . Además aproximando los subgrupos discretos de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^2)$  por subgrupos finitamente generados obtuvo este resultado para cualquier subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^2)$ . Posteriormente D. Sullivan en [S3] generalizó este resultado y demostró que si  $G$  es un subgrupo geoméricamente finito de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$ , entonces de nuevo se obtiene que  $DH(G) \geq \delta(G)$ .

Recientemente C. Bishop y P. Jones han demostrado en [BJ] que, para todo subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^3)$  finitamente generado que es geoméricamente infinito, la dimensión de Hausdorff del conjunto límite es 2.

Si  $G$  es geoméricamente finito el conjunto límite consta del conjunto límite cónico y una colección (numerable) de puntos fijos parabólicos. Para subgrupos de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^2)$ , éste es un resultado de Beardon y Maskit [BM] y su demostración puede extenderse a dimensión superior.

Patterson y Sullivan han demostrado que si  $G$  es geoméricamente finito,

$$DH(\Lambda(G)) = DH(\Lambda_c(G)) = \delta(G).$$

La herramienta fundamental en sus demostraciones es la construcción de una medida finita  $\mu$  con soporte en el conjunto límite  $\Lambda(G)$  verificando

$$g^* \mu = |g'|^{\delta(G)} \mu, \quad \text{para todo } g \in G.$$



donde  $|g'|$  es la distorsión lineal de  $g$ , y  $g^*\mu$  es el pull-back de  $\mu$  por  $g$ . La medida  $\mu$  es conocida como la *medida de Patterson*. Describiremos su construcción en la siguiente sección.

Observemos que las definiciones y propiedades anteriores pueden trasladarse por conjugación a subgrupos discretos del grupo de Möbius del semiespacio  $\mathbb{H}^{d+1}$ .

### 1.6. La medida de Patterson. El flujo geodésico.

Para todo subgrupo discreto  $G$  de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^d)$  se puede construir una medida  $\mu$  soportada sobre el conjunto límite de  $G$  y que verifica  $g^*\mu = |g'|^{\delta(G)}\mu$  para todo  $g \in G$ , donde  $|g'|$  denota la distorsión lineal de  $g$ . Esta medida es de gran importancia en la teoría ergódica de los grupos Kleinianos. Sus propiedades y construcción aparecen en los trabajos de S.J. Patterson [P2] (para  $d = 2$ ) y D. Sullivan [S2], [S3] (para  $d \geq 2$ ). En [N2] aparece una buena descripción bastante detallada basada en estos trabajos. A continuación describiremos su construcción y algunas de sus propiedades.

Supongamos primero que  $G$  es de tipo divergente. Esto significa que para  $x, y \in \mathbb{B}^d$  la serie de Poincaré

$$(1.4) \quad T_s(x, y) = \sum_{g \in G} e^{-s \rho(x, g(y))}$$

diverge para el exponente crítico  $s = \delta(G)$ . Aquí  $\rho(\cdot, \cdot)$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathbb{B}^d$ . Es claro que para todo  $x', y' \in \mathbb{B}^d$  las series  $T_s(x, y)$  y  $T_s(x', y')$  convergen o divergen simultáneamente.

Fijamos  $y \in \mathbb{B}^d$  y para  $x \in \mathbb{B}^d$  y todo  $s > \delta$  definimos la medida

$$\mu_{x,s} = \frac{1}{T_s(y, y)} \sum_{g \in G} e^{-s \rho(x, g(y))} D(g(y)),$$

donde  $D(g(y))$  es la delta de Dirac en  $g(y)$ .

Si  $\{s_n\}$  es una sucesión tal que  $s_n \rightarrow \delta(G)^+$ , entonces por el teorema de Helly las medidas  $\mu_{x,s_n}$  convergen débilmente a una medida  $\mu_x$  en  $\overline{\mathbb{B}^d}$ . Como  $T_{\delta(G)}(y, y) = \infty$  la medida  $\mu_x$  tiene soporte en el conjunto límite  $\Lambda(G)$ . Diferentes sucesiones  $\{s_n\}$  pueden llevar a diferentes medidas límites. Denotaremos por  $M_x$  la familia de estas medidas.

Si el grupo  $G$  es de tipo convergente, es decir cuando  $T_{\delta(G)}(x, y) < \infty$ , con la construcción anterior obtenemos medidas cuyo soporte no es el conjunto límite. Esta dificultad se supera multiplicando  $T_s(x, y)$  por un factor  $h(e^{\rho(x, g(y))})$  tal que

- (i)  $T_s^*(x, y) = \sum_{g \in G} e^{-s \rho(x, g(y))} h(e^{\rho(x, g(y))})$  converge para  $s > \delta(G)$  y diverge para  $s \leq \delta(G)$ .



(ii) Para  $t$  en un intervalo acotado de  $\mathbb{R}$ ,

$$\frac{h(e^{r+t})}{h(e^r)} \rightarrow 1, \quad \text{uniformemente cuando } r \rightarrow \infty.$$

En este caso definimos

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{T_s^*(y,y)} \sum_{g \in G} e^{-s \rho(x,g(y))} h(e^{\rho(x,g(y))}) D(g(y)).$$

El resto de la construcción es similar al caso divergente. Llamamos de nuevo  $M_r$  a la familia de medidas que se obtienen.

Las medidas  $\mu_r$  construidas satisfacen las siguientes propiedades.

- (i) Tienen soporte en el conjunto límite.
- (ii) Para todo  $g \in G$ ,  $g^* \mu_r = \mu_{g^{-1}(x)} = |g'_x|^{\delta(G)} \mu_r$ .

Aquí  $|g'_x| = \frac{|(T \circ g)'|}{|T'|}$  para  $T \in \text{Möb}(\mathbb{B}^d)$  con  $T(x) = 0$ .

Si el grupo  $G$  es geoméricamente finito, la familia  $M_r$  consta de una única medida  $\mu_r$ , que, además es no-atómica.

Llamaremos a la medida  $\mu_0$  la *medida de Patterson* y la denotaremos simplemente por  $\mu$ . Es claro que, por conjugación, podemos hablar de la medida de Patterson para subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ .

El siguiente teorema, debido a D. Sullivan [S3] y P. Tukia [T2], nos da una estimación de la medida de Patterson asociada a un subgrupo  $G$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  geoméricamente finito. Esta estimación será de gran utilidad en la tesis.

**Teorema ST** ([S3], [T2]). Sea  $\xi \in \Lambda(G)$ , entonces

$$\mu(B(\xi, r)) \sim r^{\delta(G)} \Phi((\xi, r)),$$

donde  $\Phi((\xi, r)) \sim (R/r)^{k-\delta(G)}$  si el punto  $(\xi, r) \in \mathbb{H}^{d+1}$  pertenece a una horobola de radio  $R$  asociada a una cúspide de rango  $k$ . En caso contrario  $\Phi((\xi, r)) \sim 1$ .

Conviene señalar que la función  $\Phi$  es el levantamiento de una autofunción correspondiente al autovalor  $\delta(\delta - d)$  del operador de Laplace-Beltrami de  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$ .

Vamos ahora a describir algunos importantes resultados sobre el comportamiento del flujo geodésico con respecto a una nueva medida obtenida a partir de la medida de Patterson.

Denotamos por  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  la esfera unidad del espacio tangente  $\mathbb{H}^{d+1} \times \partial\mathbb{B}^d$ . Una transformación  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  lleva la geodésica que parte de  $x$  con dirección  $\theta$  en la geodésica que parte de  $T(x)$  con dirección  $\frac{T'(x)}{|T'(x)|}\theta$ . Esto define una acción natural de  $T$  en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$ .

Consideremos la función  $d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})} : \Omega(\mathbb{H}^{d+1}) \times \Omega(\mathbb{H}^{d+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((x, \theta), (y, \theta')) = \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, y) + \left| \theta' - \frac{T'_{yx}(x)}{|T'_{yx}(x)|} \theta \right|,$$

donde denotamos por  $\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\cdot, \cdot)$  la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}^{d+1}$  y por  $T_{yx}$  la transformación en  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  tal que

$$T_{yx}(y) = x \quad \text{y} \quad \frac{T'_{yx}(y)}{|T'_{yx}(y)|} = 1.$$

Obsérvese que si  $x = y$ , entonces  $d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((x, \theta), (y, \theta')) = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$  donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $\theta$  y  $\theta'$ .

La función  $d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}$  es una distancia en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  invariante por transformaciones de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ , (ver e.g. [N2]).

Para todo punto  $(x, \theta) \in \Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  denotamos por  $\gamma_{x, \theta}$  la geodésica en  $\mathbb{H}^{d+1}$  que pasa por  $x$  con dirección  $\theta$ . Sea  $\pi : \Omega(\mathbb{H}^{d+1}) \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  la función que lleva  $((x, \theta), t)$  en  $(\gamma_{x, \theta}(t_0 + t), \gamma'_{x, \theta}(t_0 + t))$  donde  $\gamma_{x, \theta}(t_0) = x$ . Esta función define un flujo en el espacio métrico  $(\Omega(\mathbb{H}^{d+1}), d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})})$ , el *flujo geodésico*.

Hay una correspondencia natural entre los espacios

$$\Omega(\mathbb{H}^{d+1}) \quad \text{y} \quad ((\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{\text{diagonal}\}) \times \mathbb{R}.$$

A cada punto  $(x, \theta)$  le hacemos corresponder el punto  $(\eta_-, \eta_+, s)$  donde  $\eta_-$  y  $\eta_+$  son los puntos inicial y final de la geodésica  $\gamma_{x, \theta}$  y  $s$  es la distancia hiperbólica dirigida entre  $x$  y el punto  $P$  de la geodésica  $\gamma_{x, \theta}$  con  $(d+1)$ -coordenada máxima. Es decir, si  $x$  pertenece al arco de geodésica que une  $P$  y  $\eta_+$ , entonces  $s = \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, P)$ ; en caso contrario  $s = -\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, P)$ .

Con esta correspondencia en mente se tiene una medida en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  inducida por la medida definida en  $((\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{\text{diagonal}\}) \times \mathbb{R}$  por medio de

$$dm = \frac{d\mu(\eta_-) d\mu(\eta_+) ds}{|\eta_+ - \eta_-|^{2\delta(G)}},$$

donde  $\mu$  es la medida de Patterson asociada a un subgrupo de Möb  $(\mathbb{H}^{d+1})$  geométricamente finito  $G$ , y  $\delta(G)$  es el exponente de convergencia del grupo.

Nos referiremos a esta medida en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  como *la medida de Sullivan* asociada a  $G$ . Utilizando las propiedades de la medida  $\mu$  es fácil ver que la medida de Sullivan es  $G$ -invariante.

La distancia  $d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}$  define de forma natural una distancia  $d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G)}$  en la esfera unidad del espacio tangente  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G) = \mathbb{H}^{d+1}/G \times \partial\mathbb{B}^d$  y el flujo geodésico en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1})$  se proyecta en un flujo en el espacio métrico  $(\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G), d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G)})$ , este es el flujo geodésico en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G)$ .

La medida de Sullivan también se proyecta en una medida en el espacio cociente  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G)$  que es invariante por el flujo geodésico. De nuevo nos referiremos a esta medida como la medida de Sullivan.

Resumimos a continuación algunos importantes resultados debidos a D. Sullivan y contenidos en [S1] y [S3].

Sea  $G$  un subgrupo de Möb  $(\mathbb{H}^{d+1})$  geométricamente finito y  $\Lambda(G)$  su conjunto límite. Denotemos por  $\mu$  la medida de Patterson y por  $m$  la medida de Sullivan en  $\Omega(\mathbb{H}^{d+1}/G)$ . Entonces,

- (i) La acción diagonal de  $G$  sobre  $\Lambda(G) \times \Lambda(G)$  es ergódica.
- (ii) La medida  $m$  tiene masa total finita.
- (iii) El flujo geodésico es conservativo y ergódico con respecto a la medida  $m$ .
- (iv) La entropía del flujo geodésico con respecto a  $m$  es igual a  $\delta(G)$ .

Es inmediato comprobar que, como consecuencia de (i), la acción de  $G$  sobre  $\Lambda(G)$  es ergódica.

### 1.7. Transformaciones de Möbius y números de Clifford.

El *álgebra de Clifford*  $\mathcal{C}_n$  es el álgebra asociativa sobre  $\mathbb{R}$  generada por  $i_1, \dots, i_n$  con las relaciones

$$i_h i_k = -i_k i_h \quad (h \neq k), \quad i_h^2 = -1.$$

Cada elemento  $a \in \mathcal{C}_n$  tiene una única representación de la forma  $a = \sum a_I I$  donde  $a_I \in \mathbb{R}$  y la suma es sobre todos los productos  $I = i_{\nu_1} \cdots i_{\nu_m}$  con  $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m \leq n$ . El producto vacío,  $I = \emptyset$ , es identificado con el número real 1. La norma de  $a$ ,  $|a|$ , se define como  $|a|^2 = \sum a_I^2$ .

Los números de Clifford de la forma

$$x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_n i_n$$



se llaman *vectores*. El grupo de Clifford,  $\text{Cliff}(n)$ , es el grupo formado por los productos de vectores no nulos.

Hay tres involuciones importantes definidas en  $C_n$ . La involución principal,  $a \mapsto a'$ , se obtiene al reemplazar todo  $i_m$  por  $-i_m$ . La involución  $a \mapsto a^*$  se define invirtiendo el orden de los factores de cada término  $I = i_{\nu_1} \cdots i_{\nu_m}$ . Finalmente la conjugación  $a \mapsto \bar{a}$  se define como  $\bar{a} = (a')^*$ .

Para cualquier vector  $x$  se verifica que  $|x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x$  y  $x^{-1} = |x|^{-2}\bar{x}$ .

El grupo de Vahlen  $SL(2, C_n)$  se define como

$$SL(2, C_n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \text{Cliff}(n) \cup \{0\}, ab^*, cd^* \in \mathbb{R}^{n+1}, ad^* - bc^* = 1 \right\}.$$

El grupo  $PSL(2, C_n(\mathbb{Z})) = SL(2, C_n(\mathbb{Z}))/\{\pm id\}$  resulta ser isomorfo al grupo Möb( $\mathbb{H}^{n+2}$ ), (ver e.g. [A4], [E]).

Obsérvese que si denotamos por  $C_n(\mathbb{Z})$  el módulo de enteros de  $C_n$  y por  $SL(2, C_n(\mathbb{Z}))$  el subgrupo de  $SL(2, C_n)$  con entradas en  $C_n(\mathbb{Z})$ , entonces el grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$  es isomorfo a  $SL(2, C_0(\mathbb{Z}))$  y el grupo de Picard  $SL(2, \mathbb{Z}(i))$  es isomorfo a  $SL(2, C_1(\mathbb{Z}))$ .

Por tanto una generalización natural de estos grupos serían los grupos  $SL(2, C_n(\mathbb{Z}))$ . C. Maclachlan, P.L. Waterman y N.J. Wielenberg demuestran en [MWW] que los grupos  $SL(2, C_n(\mathbb{Z}))$  son grupos aritméticos finitamente generados y de covolumen finito.

Como hemos visto en la sección 1.3 hay una estrecha relación entre ciertos resultados sobre el comportamiento asintótico de las geodésicas en una variedad  $\mathcal{M} = \mathbb{H}^{d+1}/G$  y resultados de aproximación por la órbita de  $G$ . Estos últimos se pueden traducir en resultados de aproximación en  $\mathbb{R}^d$  para algunos grupos concretos como es el caso del grupo modular, el grupo de Picard, los grupos modulares  $n$ -dimensionales y los grupos de Hecke. Finalizamos esta sección recordando la definición y algunas propiedades de los grupos de Hecke.

Para todo  $\lambda > 0$  denotamos por  $\Gamma(\lambda)$  el subgrupo de Möb( $\mathbb{H}^2$ ) generado por

$$z \rightarrow z + \lambda, \quad \text{y} \quad z \rightarrow \frac{-1}{z}.$$

Estos grupos son los *grupos de Hecke*.

El grupo  $\Gamma(\lambda)$  es propiamente discontinuo si y sólo si

- (i)  $\lambda = 2 \cos(\pi/q)$ , con  $q \in \mathbb{Z}$  y  $q \geq 3$ , cuando  $\lambda < 2$ , ó bien
  - (ii)  $\lambda \geq 2$ .
- (Ver e.g. [B]).

D. Rosen introdujo en [Ro] la siguiente clase de fracciones continuas intrínsecamente relacionadas con los grupos de Hecke,

$$(m_0, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots) := m_0 + \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \dots}},$$

donde  $m_i \in \lambda\mathbb{Z}$ . Estas fracciones continuas se llaman  $\lambda$ -fracciones.

En [Ro] se demuestra que, para todo  $\lambda > 2$ , todo número real en el conjunto límite de  $\Gamma(\lambda)$  puede representarse unívocamente como una  $\lambda$ -fracción. Para  $\lambda < 2$  se introduce la noción de  $\lambda$ -fracción *reducida* y se demuestra que todo número real tiene una única representación como una  $\lambda$ -fracción reducida.

El siguiente resultado de Rosen describe los elementos de  $\Gamma(\lambda)$ .

**Teorema** [Ro]. *Una transformación  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma(\lambda)$  si y sólo si*

$$\frac{a}{c} = \left(m_0, \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right),$$

con  $m_i \in \lambda\mathbb{Z}$ , es decir,  $a/c$  es una  $\lambda$ -fracción finita.



## Capítulo 2

### Sistemas bien distribuidos y resultados de aproximación

Este capítulo explica la técnica general que hemos desarrollado para el análisis de nuestros problemas de aproximación y que aplicaremos profusamente en los capítulos 3, 4 y 5.

Es natural plantear los problemas de aproximación de nuestro interés en un contexto más general. Este nuevo contexto involucra una familia numerable  $\mathcal{W}$  de bolas euclídeas en  $\mathbb{R}^d$  con radios menores que uno y una medida  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$ , además de ciertas propiedades que relacionan a  $\mathcal{W}$  y  $\mu$ . El concepto de *sistema bien distribuido*  $(\mathcal{W}, \mu)$ , que aparece en la sección 1, reúne todas estas propiedades. El uso del término “bien distribuido” se debe principalmente a una propiedad de equidistribución en  $\mathbb{R}^d$  (con respecto a la medida  $\mu$ ) de las bolas en  $\mathcal{W}$  de radio comparable (Propiedad 1.4). Conviene señalar que la definición de sistema bien distribuido cuando  $\mu$  es la medida de Lebesgue es en cierto sentido una extensión del concepto de *sistema regular* introducido por A. Baker y W. Schmidt en [BS] para obtener resultados de aproximación diofántica de números algebraicos de altura dada.

Dados  $(\mathcal{W}, \mu)$  un sistema bien distribuido y  $\mathcal{B}$  una bola euclídea en  $\mathbb{R}^d$  con centro en el soporte de  $\mu$  que denotaremos por  $\Lambda$ , con  $\mu(\mathcal{B}) < \infty$ , nos interesa estudiar los conjuntos  $A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau)$  y  $A_2(\mathcal{B}, \mathcal{W}, F, C)$  que definimos a continuación:

Para todo  $\tau > 1$ , sea

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau) := \{ \xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < c(\xi) R_i^\tau \\ \text{para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W} \text{ con } a_i \in \mathcal{B} \}.$$

Sea  $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente con las siguientes propiedades:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ .
- (ii) Existe  $n_0$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ , si  $1/x_1, 1/x_2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ , entonces  $F(x_1) \sim F(x_2)$ . Aquí  $\rho$  es un número en  $(0, 1)$  asociado al sistema  $(\mathcal{W}, \mu)$ .

Definimos,

$$A_2(\mathcal{B}, \mathcal{W}, F) := \{\xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < F(R_i^{-1}) R_i \\ \text{para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W} \text{ con } a_i \in \mathcal{B}\}.$$

Como ya hemos señalado la sección 1 de este capítulo contiene la definición de sistema bien distribuido así como algunos ejemplos. En la sección 2 se estudia la dimensión de Hausdorff y la  $\mu$ -dimensión del conjunto  $A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau)$ . Finalmente, la sección 3 contiene un resultado tipo Khintchine para el conjunto  $A_2(\mathcal{B}, \mathcal{W}, F)$ , es decir, se da una condición necesaria y suficiente sobre la función  $F$  para que  $\mu(A_2(\mathcal{B}, \mathcal{W}, F)) > 0$ .

En capítulos sucesivos estudiaremos varios sistemas bien distribuidos asociados a grupos geoméricamente finitos donde la medida  $\mu$  es la medida de Patterson. La definición general de sistema bien distribuido está diseñada para adaptarse a estas aplicaciones.

## 2.1. Sistemas bien distribuidos.

Sea  $\mathcal{W} = \{B_i = B(a_i, R_i)\}$  una familia numerable de bolas euclídeas en  $\mathbb{R}^d$ , y  $\mu$  una medida no atómica en  $\mathbb{R}^d$  con soporte  $\Lambda$ . El par  $(\mathcal{W}, \mu)$  es un sistema bien distribuido si tiene las siguientes propiedades:

(1.1) Existe  $\lambda_0 > 1$  tal que, para toda bola  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda$ , se verifica

$$\mu(\mathcal{B}) \leq \mu(\lambda \mathcal{B}) \leq c(\lambda) \mu(\mathcal{B}), \quad \text{para todo } 1 < \lambda \leq \lambda_0.$$

El número  $\lambda_0$  se llama *parámetro de homotecia de  $\mu$* .

### Propiedades de $\mu$ -compatibilidad.

(1.2) Para toda  $B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W}$ , se tiene que  $a_i \in \Lambda$  y  $R_i < 1$ .

(1.3) Existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha > 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$  y para toda  $B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W}$ ,

$$\mu(B(a_i, r)) \sim r^\alpha R_i^\beta, \quad \text{para todo } r \leq R_i.$$

### Propiedades de equidistribución.

(1.4) Existe  $\rho \in (0, 1)$ , tal que, para toda bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda$  y con  $\mu(\mathcal{B}) < \infty$ , existe un número natural  $n_0(\mathcal{B})$  tal que para todo  $n \geq n_0$  el conjunto

$$\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) = \{B(a, R) \in \mathcal{W} : a \in \mathcal{B}, R \in [\rho^{n+1}, \rho^n]\}$$

verifica



(i) Para todo  $B_i, B_j \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})$  con  $i \neq j$ ,

$$\|a_i - a_j\| > \rho^{n+1}.$$

(ii)  $\#\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) \sim \left(\frac{1}{\rho^n}\right)^{\alpha+\beta} \mu(\mathcal{B})$ .

Llamaremos a  $(\alpha, \beta, \rho)$  el *parámetro* del sistema bien distribuido  $(\mathcal{W}, \mu)$ .

OBSERVACIÓN: Por (1.1) y (1.4.i) es claro que existe  $c > 0$  tal que para  $n$  suficientemente grande se tiene que

$$\sum_{B \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})} \mu(B) \leq c \mu(\mathcal{B}).$$

Además, por (1.3),

$$\sum_{B \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})} \mu(B) \sim \#\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) (\rho^n)^{\alpha+\beta}.$$

Por lo tanto, la condición (1.4) nos dice que, salvo constantes fijas, la cardinalidad de  $\mathcal{W}(n, \mathcal{B})$  es maximal.

Un ejemplo simple de sistema bien distribuido en  $\mathbb{R}$  lo constituyen la medida de Lebesgue y la familia de intervalos con centro en los racionales  $p/q$ , m.c.d.  $(p, q) = 1$ , y radios  $1/q^2$ .

Fijado un  $\rho \in (0, 1)$  sea  $T_n$  el número de racionales  $p/q \in [0, 1]$  tales que m.c.d.  $(p, q) = 1$  y  $1/q^2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ . Como el número de  $p$ 's menores o iguales que  $q$  primos relativos a  $q$  es comparable a  $q \sim 1/\rho^{n/2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y para  $n$  suficientemente grande el número de enteros en  $(1/\rho^{n/2}, 1/\rho^{(n+1)/2}]$  es comparable a  $1/\rho^{n/2}$ , entonces  $T_n \sim \rho^{-n}$  y el sistema está bien distribuido con parámetro  $(1, 0, \rho)$ .

Un ejemplo similar en  $\mathbb{R}^2$  es de nuevo la medida de Lebesgue y la familia de bolas de centro  $z/w$  y radio  $1/|w|^2$  donde  $z$  y  $w$  son enteros gaussianos primos relativos. La medida de Lebesgue y la familia de intervalos en  $\mathbb{R}$  con centros en números diádicos  $r + p/2^n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  y  $p$  un entero impar) y radios  $1/2^n$  constituyen también un sistema bien distribuido en  $\mathbb{R}$  con parámetro  $(1, 0, \rho)$ . Sin embargo, si consideramos de nuevo los números diádicos  $r + p/2^n$ , pero intervalos de radio  $1/2^{2n}$ , no obtenemos un sistema bien distribuido.

Estos y otros ejemplos serán estudiados con más detalle en los capítulos sucesivos para el caso en que  $\mu$  es la medida de Patterson.

## 2.2. Sistemas bien distribuidos y conjuntos bien aproximables.

Para  $(\mathcal{W}, \mu)$  un sistema bien distribuido en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{B}$  una bola en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda = \text{sop } \mu$ , y  $\mu(\mathcal{B}) < \infty$ , definimos para todo  $\tau > 1$  el conjunto  $A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau)$  de puntos  $(\mathcal{W}, \tau)$ -bien aproximables en  $\mathcal{B}$  como

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau) := \{ \xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < c(\xi) R_i^\tau \text{ para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W} \text{ con } a_i \in \mathcal{B} \}.$$

Sea  $\{(\mathcal{W}_\ell, \mu)\}$ , con  $\ell = 1, 2, \dots, m$ , una familia finita de sistemas bien distribuidos en  $\mathbb{R}^d$  con parámetros  $(\alpha_\ell, \beta_\ell, \rho_\ell)$ , respectivamente. Supongamos además que, para  $\tau > 1$ , existen  $\alpha'_\ell(\tau)$ ,  $\beta'_\ell(\tau)$  tales que, si  $B(a, R) \subset B_i^\tau = B(a_i, R_i^\tau)$  con  $a \in \Lambda$  ( $a \neq a_i$ ) y  $B_i \in \mathcal{W}_\ell$ , entonces

$$(2.1) \quad \mu(B(a, R)) \leq c R^{\alpha'_\ell(\tau)} R_i^{\beta'_\ell(\tau)}.$$

Obsérvese que la condición (1.3) de sistema bien distribuido nos dice que  $\mu(B_i^\tau) \sim R_i^{\tau\alpha_\ell + \beta_\ell}$  y, en consecuencia,  $\tau\alpha'_\ell(\tau) + \beta'_\ell(\tau) \leq \tau\alpha_\ell + \beta_\ell$ .

Definimos

$$w_1(\ell, \tau) = \begin{cases} \alpha'_\ell(\tau) - \alpha_\ell + \frac{\alpha_\ell + \beta'_\ell(\tau)}{\tau}, & \text{si } \tau \geq 1 + \frac{\beta'_\ell(\tau)}{\alpha_\ell}, \\ \min \left\{ \alpha'_\ell, \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\tau} \right\}, & \text{si } 1 < \tau < 1 + \frac{\beta'_\ell(\tau)}{\alpha_\ell}. \end{cases}$$

y

$$w_2(\ell, \tau) = \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\alpha_\ell \tau + \beta_\ell}.$$

Para ilustrar estas definiciones obsérvese que si consideramos por ejemplo el sistema bien distribuido con parámetro  $(\alpha_\ell = 1, \beta_\ell = 0, \ell)$  constituido por la medida de Lebesgue y la familia de intervalos en  $\mathbb{R}$  con centros en números diádicos  $r + p/2^n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , y  $p$  un entero impar) y radios  $1/2^n$ , entonces en la desigualdad (2.1) con la medida de Lebesgue se tiene que  $\alpha'_\ell = 1$ , y  $\beta'_\ell = 0$ . Por tanto, en este caso,

$$w_1(\ell, \tau) = w_2(\ell, \tau) = \frac{1}{\tau}.$$

Si  $\mathcal{B}$  es una bola en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda$  y  $\tau > 1$  se tienen los siguientes resultados con

$$w_1(\tau) = \min_\ell w_1(\ell, \tau) \quad \text{y} \quad w_2(\tau) = \min_\ell w_2(\ell, \tau).$$

**Teorema 1.** Para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$M_{w_1(\tau) - \varepsilon} \left( \bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau) \right) > 0,$$

$$M_{w_2(\tau) - \varepsilon}^\mu \left( \bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau) \right) > 0.$$

Obsérvese que el teorema 1 da una cota inferior de la dimensión de Hausdorff. Las cotas superiores son más fáciles y son el contenido del siguiente teorema:

**Teorema 2.**

$$w_1(\tau) \leq DH\left(\bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)\right) \leq \min_{\ell} \left\{ \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\tau} \right\},$$

$$w_2(\tau) = DH_\mu\left(\bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)\right).$$

En particular, en nuestro ejemplo de números diádicos  $r + p/2^n$ , se obtiene que, para cada  $\tau > 1$ , el conjunto de los  $\xi \in \mathbb{R}$  tales que

$$|\xi - (r + \frac{p}{2^n})| < \frac{c(\xi)}{2^{n\tau}},$$

para infinitos  $r + p/2^n$ , tiene dimensión de Hausdorff igual a  $1/\tau$ .

### 2.2.1. Demostración del teorema 1.

La clave de la demostración del teorema 1 es la construcción de ciertos conjuntos tipo Cantor contenidos en  $\bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)$ . La descripción de estos conjuntos es el objetivo del siguiente lema.

**Lema 1.** Sea  $\varepsilon_0 = \min\{w_1(\tau), w_2(\tau)\}$ . Para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  existe un conjunto tipo Cantor  $C_\varepsilon$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $C_\varepsilon = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{E_k \in \mathcal{E}_k} E_k$ , donde  $\mathcal{E}_0 = \{t\mathcal{B}\}$  con  $0 < t \leq 1$  tal que  $\mu(t\mathcal{B}) < 1$  y, en general, cada generación  $\mathcal{E}_k$  es una familia finita de bolas disjuntas en  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii) Para  $j \geq 1$  con  $j \equiv (\ell - 1) \pmod{m}$ , y  $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ , si  $B(a, r) \in \mathcal{E}_j$  entonces  $a$  es el centro de alguna bola  $B(a, R) \in \mathcal{W}_\ell$  y el radio  $r$  es igual a un radio  $r_j \sim R^\tau$ .
- (iii) Cada bola en  $\mathcal{E}_j$  está contenida en una bola de  $\lambda_0^{-1}\mathcal{E}_{j-1}$ . Además, existe una constante  $c' > 0$  tal que

$$(1 - c')r_j^{1/\tau} > 2r_j \quad \text{y} \quad 1 + \frac{4'}{c} \leq \lambda_0.$$

Aquí  $\lambda_0$  es el parámetro de homotecia de  $\mu$ .

- (iv) La distancia entre los centros de las bolas de la generación  $\mathcal{E}_j$  es al menos  $r_j^{1/\tau}$ .
- (v) Toda bola de  $\mathcal{E}_j$  contiene el mismo número de bolas de  $\mathcal{E}_{j+1}$ . Este número es comparable a

$$\frac{r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell / \tau}}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/2}}$$

donde  $j \equiv (\ell - 1) \bmod m$ ,  $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

- (vi)  $(\#\mathcal{E}_j) r_j^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau - \varepsilon} \geq c$ , donde  $c > 0$ ,  $j \equiv (\ell - 1) \bmod m$ .
- (vii)  $M_{w_1(\tau) - \varepsilon}(C_\varepsilon) > 0$ , y  $M_{w_2(\tau) - \varepsilon}^\mu(C_\varepsilon) > 0$ .

OBSERVACIÓN: Sea  $j \equiv (\ell - 1) \bmod m$ , con  $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Por la propiedad (ii) y la propiedad (1.3) de  $(\mathcal{W}_\ell, \mu)$  también se tiene que para toda bola  $B(a, r_j) \in \mathcal{E}_j$ ,

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} \mu(B(a, r_j)) &\sim r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell / \tau}, \\ \mu(B(a, r_j^{1/\tau})) &\sim r_j^{(\alpha_\ell + \beta_\ell) / \tau}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  el conjunto tipo Cantor  $C_\varepsilon$  descrito en el lema 1 está contenido en el conjunto  $\cap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)$ . Esto se ve claramente por la propiedad (ii) de  $C_\varepsilon$ . Así el teorema 1 es una consecuencia directa de la propiedad (vii) del lema 1. Primero demostraremos como se obtiene esta propiedad y a continuación veremos como se construyen los conjuntos de Cantor  $C_\varepsilon$  a partir de los sistemas bien distribuidos  $(\mathcal{W}_\ell, \mu)$ . ■

DEMOSTRACIÓN DE LA PARTE (vii) DEL LEMA 1. Si  $C_\varepsilon$  es el conjunto tipo Cantor del Lema 1, debemos probar que

$$M_{w_1(\tau) - \varepsilon}(C_\varepsilon) > 0 \quad \text{y} \quad M_{w_2(\tau) - \varepsilon}^\mu(C_\varepsilon) > 0.$$

Para obtener este resultado la idea es construir una medida de probabilidad  $\nu_\varepsilon$  con soporte en  $C_\varepsilon$  y con la propiedad de que para toda bola  $B = B(a_B, r_B)$  con  $a_B \in \Lambda$

$$(2.1.2) \quad \nu_\varepsilon(B) \leq C r_B^{w_1(\tau) - \varepsilon}$$

y

$$(2.1.3) \quad \nu_\varepsilon(B) \leq C (\mu(B))^{w_2(\tau) - \varepsilon}.$$

De (2.1.2) y (2.1.3) es claro que, para todo cubrimiento  $\{B_s = B(a_s, r_s)\}$  de  $C_\varepsilon$ , se tiene

$$1 = \nu_\varepsilon(C_\varepsilon) \leq \sum_s \nu_\varepsilon(B_s) \leq C \sum_s r_s^{w_1(\tau) - \varepsilon}$$



y

$$1 = \nu_\varepsilon(C_\varepsilon) \leq \sum_s \nu_\varepsilon(B_s) \leq C \sum_s (\mu(B_s))^{w_2(\tau)-\varepsilon}.$$

En consecuencia, se sigue (vii).

Definimos  $\nu_\varepsilon$  en las bolas de las generaciones sucesivas  $\{\mathcal{E}_k\}$  inductivamente. Primero,  $\nu_\varepsilon(E_0) = 1$ , y, a continuación,

$$(2.1.4) \quad \nu_\varepsilon(E_{k+1}) = \nu_\varepsilon(E_{k+1} \cap C_\varepsilon) := \frac{1}{\frac{\#\mathcal{E}_{k+1}}{\#\mathcal{E}_k}} \nu_\varepsilon(E_k),$$

para todo  $E_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1}$ . Obsérvese que en este caso

$$(2.1.5) \quad \nu_\varepsilon(E_{k+1}) = \frac{1}{\#\mathcal{E}_{k+1}}.$$

Para todo conjunto  $U \subset \mathbb{R}^d$ ,

$$\nu_\varepsilon(U) := \inf \sum_{F \in \mathcal{F}} \nu_\varepsilon(F),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos  $\mathcal{F}$  de  $U$  con bolas en  $\cup_{k \geq 0} \mathcal{E}_k$ .

Para verificar (2.1.2) y (2.1.3) supongamos primero que  $U = E_k \in \mathcal{E}_k$ . Por (2.1.5) y la propiedad (vi) del lema 1, se verifica que para  $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $k \equiv (\ell - 1) \bmod m$ ,

$$(2.1.6) \quad \nu_\varepsilon(U) \leq C r_k^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau - \varepsilon} \leq C r_k^{w_1(\tau) - \varepsilon}.$$

Además, por (2.1.1),  $\mu(U) \sim r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}$  y, en consecuencia,

$$(2.1.7) \quad \nu_\varepsilon(U) \leq C (\mu(U))^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/(\alpha_\ell \tau + \beta_\ell) - \varepsilon} \leq C (\mu(U))^{w_2(\tau) - \varepsilon}.$$

Por lo tanto, queda sólo considerar el caso  $U \notin \cup_{k \geq 0} \mathcal{E}_k$ .

Si  $U \not\subset E_0$  y  $U \cap C_\varepsilon \neq \emptyset$ , como  $C_\varepsilon \subset \lambda_0^{-1} E_0$ , se tiene que  $2r_U \geq \lambda_0^{-1} r_0$ . Así, si  $\nu(\lambda_0^{-1} E_0) \leq C (\lambda_0^{-1} r_0)^{w_1(\tau) - \varepsilon}$ , también tenemos que

$$\nu_\varepsilon(U) \leq \nu_\varepsilon(\lambda_0^{-1} E_0) \leq C (\lambda_0^{-1} r_0)^{w_1(\tau) - \varepsilon} \leq C' r_0^{w_1(\tau) - \varepsilon}.$$

De forma similar, si  $\nu_\varepsilon(U \cap E_0) \leq (\mu(U \cap E_0))^{w_2(\tau) - \varepsilon}$ , también se verifica que

$$\nu_\varepsilon(U) = \nu_\varepsilon(U \cap E_0) \leq \mu((U \cap E_0))^{w_2(\tau) - \varepsilon} \leq (\mu(U))^{w_2(\tau) - \varepsilon}.$$

Por lo tanto, podemos suponer que  $U \subset \lambda_0^{-1} E_0$ .

Sea  $k = k(U) = \max\{j : U \subset E_j \text{ para algún } E_j \in \mathcal{E}_j\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U$  intersecta al menos a dos bolas de la familia  $\mathcal{E}_{k+1}$ .

Por (iv) sabemos que la distancia entre los centros de las bolas de la familia  $\mathcal{E}_{k+1}$  es al menos  $r_{k+1}^{1/\tau}$ . Entonces  $2r_U \geq r_{k+1}^{1/\tau} - 2r_{k+1}$  y, por (iii),  $r_{k+1}^{1/\tau} - 2r_{k+1} \geq c' r_{k+1}^{1/\tau}$ . Por lo tanto se tiene que

$$(2.1.8) \quad \frac{c'}{2} r_{k+1}^{1/\tau} \leq r_U \leq \frac{1}{\lambda_0} r_k.$$

Usando (2.1.4) vemos que

$$\nu_\varepsilon(U) \leq \sum_{U \cap E_{k+1} \neq \emptyset} \nu_\varepsilon(E_{k+1}) = \frac{\#\mathcal{E}_k}{\#\mathcal{E}_{k+1}} (\#\{E_{k+1} : E_{k+1} \cap U \neq \emptyset\}) \nu_\varepsilon(E_k).$$

con  $E_k \in \mathcal{E}_k$  tal que  $U \subset E_k$ .

Además, por (v), sabemos que para algún  $\ell$

$$\frac{\#\mathcal{E}_{k+1}}{\#\mathcal{E}_k} \sim \frac{r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}}{r_{k+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau}},$$

y así,

$$(2.1.9) \quad \nu_\varepsilon(U) \leq C \frac{r_{k+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau}}{r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}} (\#\{E_{k+1} : E_{k+1} \cap U \neq \emptyset\}) \nu_\varepsilon(E_k).$$

El próximo paso es encontrar una cota superior para  $\#\{E_{k+1} : E_{k+1} \cap U \neq \emptyset\}$ .

Para cada bola  $E_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1}$  denotemos por  $\frac{1}{2}E_{k+1}^{1/\tau}$  la bola con el mismo centro y con radio  $\frac{1}{2}r_{k+1}^{1/\tau}$ . Por la propiedad (iv) del lema 1 es claro que las bolas  $\frac{1}{2}E_{k+1}^{1/\tau}$  son disjuntas. Además, por (2.1.8) y (iii), se sigue que

$$\bigcup_{E_{k+1} \cap U \neq \emptyset} \frac{1}{2}E_{k+1}^{1/\tau} \subset cU \quad \text{con } c \leq \lambda_0.$$

Comparando la  $\mu$ -medida de estos conjuntos y recordando que las bolas  $\frac{1}{2}E_{k+1}^{1/\tau}$  son disjuntas, se obtiene

$$\#\{E_{k+1} : E_{k+1} \cap U \neq \emptyset\} \mu\left(\frac{1}{2}E_{k+1}^{1/\tau}\right) \leq \mu(cU).$$

Pero

$$\mu(E_{k+1}^{1/\tau}) \sim r_{k+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau},$$

y usando la propiedad (1.1) de homotecia de  $\mu$ , se obtiene que

$$\#\{E_{k+1} : E_{k+1} \cap U \neq \emptyset\} \leq C \frac{\mu(U)}{r_{k+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau}}.$$

Por lo tanto, por (2.1.9), se deduce que

$$(2.1.10) \quad \nu_\varepsilon(U) \leq C \frac{1}{r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}} \mu(U) \nu_\varepsilon(E_k),$$

si  $U \subset E_k$  y  $k \equiv (\ell - 1) \pmod{m}$ .

Para obtener (2.1.3) recordemos que ya hemos verificado (2.1.7) y que

$$\nu_\varepsilon(E_k) \leq C (\mu(E_k))^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/(\alpha_\ell \tau + \beta_\ell) - \varepsilon}.$$

Además, por (2.1.1), se tiene que  $\mu(E_k) \sim r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}$ . Por lo tanto, por (2.1.10) se sigue que

$$\nu_\varepsilon(U) \leq C \frac{\mu(U)}{\mu(E_k)} (\mu(E_k))^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/(\alpha_\ell \tau + \beta_\ell) - \varepsilon}.$$

Como  $\alpha_\ell > 0$  y  $\alpha_\ell + \beta_\ell > 0$  se tiene que

$$1 - \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\alpha_\ell \tau + \beta_\ell} \geq 0.$$

De esto y del hecho de que  $U \subset E_k$  se concluye (2.1.3).

Para obtener (2.1.2) se procede de manera similar. Como  $U \subset E_k$ , por (2.1.1) se tiene que  $\mu(U) \leq C r_U^{\alpha'_\ell(\tau)} r_k^{\beta'_\ell(\tau)/\tau}$ . Además, por (2.1.6)  $\nu_\varepsilon(E_k) \leq C r_k^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau - \varepsilon}$ . Por lo tanto, por (2.1.10), se obtiene que

$$\nu_\varepsilon(U) \leq C \frac{r_U^{\alpha'_\ell(\tau)} r_k^{\beta'_\ell(\tau)/\tau}}{r_k^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}} r_k^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau - \varepsilon} = \frac{r_U^{\alpha'_\ell(\tau)}}{r_k^{\alpha_\ell(1-1/\tau) - \beta'_\ell(\tau)/\tau + \varepsilon}}$$

Si  $\beta'_\ell(\tau) \leq \alpha_\ell(\tau - 1)$ , entonces como  $r_U \leq r_k$

$$\nu_\varepsilon(U) \leq C r_U^{\alpha'_\ell - \alpha_\ell + (\alpha_\ell + \beta'_\ell)/\tau - \varepsilon}.$$

Si  $\beta'_\ell > \alpha_\ell(\tau - 1)$ , se tiene que

$$\nu_\varepsilon(U) \leq C r_U^{\alpha'_\ell(\tau) - \varepsilon}.$$

Por lo tanto,

$$\nu_\varepsilon(U) \leq C r_U^{w_1(\ell, \tau) - \varepsilon} \leq C r_U^{w_1(\tau) - \varepsilon}. \quad \blacksquare$$

CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS TIPO CANTOR. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. La construcción de las familias de bolas  $\mathcal{E}_j$  es tipo de inductivo. Fijamos  $c' > 0$  tal que  $1 + 4/c' \leq \lambda_0$ . Empezamos por definir  $\mathcal{E}_0 = \{E_0 = B(a_B, r_0)\}$  donde  $r_0 = tr_B$  con  $0 < t \leq 1$  suficientemente pequeño para que  $\mu(tB) < 1$  y la condición (iii) se verifique.

Supongamos ahora que las familias  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_j$  ya han sido construidas. Para construir la generación  $\mathcal{E}_{j+1}$  utilizaremos bolas del conjunto

$$\bigcup_{E_j \in \mathcal{E}_j} \mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j),$$

donde  $j+1 \equiv (\ell-1) \bmod m$ , y  $n_{j+1}$  es suficientemente grande.

Recordemos que para toda bola  $B$  con centro en  $\Lambda = \text{sop } \mu$ ,

$$\mathcal{W}_\ell(n, B) = \{B(a, R) \in \mathcal{W}_\ell : a \in B, R \in [\rho_\ell^{n+1}, \rho_\ell^n]\}.$$

El tamaño "suficientemente grande" del número  $n_{j+1}$  viene determinado por las siguientes condiciones que deben satisfacer  $n_{j+1}$  y  $r_{j+1} = \rho_\ell^{n_{j+1}}$ .

(I.1)  $n_{j+1} \geq n_0(\frac{1}{2\lambda_0} E_j)$  para todo  $E_j \in \mathcal{E}_j$ , donde  $n_0(\frac{1}{2\lambda_0} E_j)$  es el número natural asociado a la bola  $\frac{1}{2\lambda_0} E_j$  en la definición de sistema bien distribuido  $(\mathcal{W}_\ell, \mu)$ .

(I.2)  $\#\mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j) > 1$ , para todo  $E_j \in \mathcal{E}_j$ .

(I.3)  $r_{j+1} \leq \frac{1}{2\lambda_0} r_j$ .

(I.4)  $(1 - c') r_{j+1}^{1/\tau} > 2 r_{j+1}$ .

(I.5)  $r_{j+1}^\epsilon \leq C r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau} \#\mathcal{E}_j$ , con  $C$  una constante positiva independiente de  $j$ .

Fijamos  $n_{j+1}$  y por consiguiente  $r_{j+1}$  en el resto del argumento. Por la definición de sistema bien distribuido sabemos que para todo  $E_j \in \mathcal{E}_j$

$$\#\mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j) \sim \frac{\mu(\frac{1}{2\lambda_0} E_j)}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau}}.$$

Además, por (ii) y (2.1.1) para  $j$  (hipótesis de inducción),

$$\mu(\frac{1}{2\lambda_0} E_j) \sim r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau},$$

y, en consecuencia, se obtiene

$$(2.1.11) \quad \#\mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{\lambda_0} E_j) \sim \frac{r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell/\tau}}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell)/\tau}}.$$



Definamos

$$m_{j+1} = \min_{E_j \in \mathcal{E}_j} \left\{ \# \mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j) \right\}.$$

La condición (I.2) garantiza que  $m_{j+1} > 1$ , pero además, por (2.1.11),

$$(2.1.12) \quad m_{j+1} \sim \frac{r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell / \tau}}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell) / \tau}}.$$

Ahora para cada  $E_j \in \mathcal{E}_j$  elegimos una subcolección

$$\widetilde{\mathcal{W}}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j) \subseteq \mathcal{W}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j)$$

con cardinalidad  $m_{j+1}$ .

Sean  $a_1, \dots, a_N$  los centros de las bolas en

$$\bigcup_{E_j \in \mathcal{E}_j} \widetilde{\mathcal{W}}_\ell(n_{j+1}, \frac{1}{2\lambda_0} E_j).$$

Definimos la generación  $\mathcal{E}_{j+1}$  como la familia de bolas  $\{B(a_i, r_{j+1})\}_{i=1}^N$ . Recordemos que  $r_{j+1} := \rho_\ell^{n_{j+1}\tau}$ .

Veamos finalmente que  $\mathcal{E}_{j+1}$  satisface todas las condiciones deseadas. Las propiedades (i), (ii), (v) se obtienen claramente de la construcción. También por construcción tenemos que si  $B(a, r_{j+1}) \in \mathcal{E}_{j+1}$  entonces  $a \in \frac{1}{2\lambda_0} E_j$  para alguna bola  $E_j \in \mathcal{E}_j$ , y de (I.3) e (I.4) se deduce la propiedad (iii). Por otra parte, por (2.1.12) e (I.5),

$$\#\mathcal{E}_{j+1} = \#\mathcal{E}_j m_{j+1} \sim \#\mathcal{E}_j \frac{r_j^{\alpha_\ell + \beta_\ell / \tau}}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell) / \tau}} \geq C \frac{1}{r_{j+1}^{(\alpha_\ell + \beta_\ell) / \tau - \varepsilon}},$$

y así, se obtiene (vi).

Finalmente, sólo nos resta comprobar que si  $B_k = B(a_k, r_{j+1}) \in \mathcal{E}_{j+1}$  ( $k = s, s'$ ), entonces

$$(2.1.13) \quad \|a_s - a_{s'}\| > r_{j+1}^{1/\tau}.$$

Pero, por construcción,  $a_s$  y  $a_{s'}$  son centros de bolas en  $\mathcal{W}_\ell$  con radios en  $[\rho_\ell^{n_{j+1}+1}, \rho_\ell^{n_{j+1}}]$  y (2.1.13) se obtiene de la propiedad (1.4.i) para  $(\mathcal{W}_\ell, \mu)$ . ■

### 2.2.2. Demostración del teorema 2.

Por el teorema 1 se tiene que

$$DH\left(\bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)\right) \geq w_1(\tau),$$

y

$$DH_\mu\left(\bigcap_{\ell=1}^m A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)\right) \geq w_2(\tau).$$

Por tanto, para concluir el teorema 2, sólo necesitamos obtener las cotas superiores y, además, como  $\bigcap_{\ell=1}^k A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau) \subset A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)$  ( $\ell = 1, 2, \dots, m$ ), es suficiente verificar, para todo  $\ell$ , que

$$DH(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)) \leq \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\tau}$$

y

$$DH_\mu(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}_\ell, \tau)) \leq \frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{\alpha_\ell \tau + \beta_\ell}.$$

Estas cotas se obtienen en el siguiente lema.

**Lema 2.** Sea  $\mu$  una medida no atómica en  $\mathbb{R}^d$  tal que para toda bola  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda$ , soporte de  $\mu$ , se satisface

$$(2.2.1) \quad \mu(\lambda \mathcal{B}) \leq c(\lambda) \mu(\mathcal{B}),$$

para todo  $1 < \lambda \leq \lambda_0$  con  $\lambda_0$  una constante mayor que uno.

Sea  $\mathcal{W} = \{B_i = B(a_i, R_i)\}$  una familia numerable de bolas en  $\mathbb{R}^d$  tales que

(1)  $R_i < 1$  y  $a_i \in \Lambda$ , para toda  $B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W}$ .

(2) Cualesquiera que sean  $B_i, B_j \in \mathcal{W}$  con  $i \neq j$ ,

$$\|a_i - a_j\| > \min\{R_i, R_j\}.$$

(3) Para toda  $B_i = B(a_i, R_i) \in \mathcal{W}$ , y dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mu(B(a_i, r)) \sim r^\alpha R_i^\beta, \quad \text{para todo } r \leq R_i.$$

Entonces, para toda bola  $\mathcal{B}$  centrada en  $\Lambda$  y con  $\mu(\mathcal{B}) < \infty$ , y para todo  $\tau > 1$ ,

$$DH(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\tau},$$

$$DH_\mu(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha \tau + \beta},$$

donde

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau) = \{\xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < C(\xi) R_i^\tau \\ \text{para infinitos } B_i \in \mathcal{W} \text{ con } a_i \in \mathcal{B}\}.$$

OBSERVACIÓN: Las condiciones sobre  $\mathcal{W}$  y  $\mu$  en el lema no garantizan que  $(\mathcal{W}, \mu)$  sea un sistema bien distribuido. Por tanto, hacen falta menos condiciones para obtener las cotas superiores, en particular, no es necesaria la propiedad (1.4) de equidistribución.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$  definamos el conjunto

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k) = \{\xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < k R_i^\tau \text{ para infinitos } B(a_i, R_i) \in \mathcal{W} \text{ con } a_i \in \mathcal{B}\}.$$

Se tiene que

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)$$

y, en consecuencia, es suficiente demostrar que para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$DH(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\tau},$$

$$DH_\mu(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha\tau + \beta}.$$

Sea  $\rho \in (0, 1)$ , Para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$  definimos

$$\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) = \{B(a, R) \in \mathcal{W} : a \in \mathcal{B}, R \in [\rho^{n+1}, \rho^n)\}.$$

Por la condición (2.2.1) de homotecia de  $\mu$  y la propiedad (2), es claro que existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\sum_{B \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})} \mu(B) \leq c \mu(\mathcal{B}).$$

Además, por la propiedad (3), se obtiene que

$$\sum_{B \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})} \mu(B) \sim \#\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) (\rho^n)^{\alpha+\beta}.$$

Por lo tanto, para  $n \geq n_0$ ,

$$(2.2.2) \quad \#\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) \leq c \frac{1}{(\rho^n)^{\alpha+\beta}} \mu(\mathcal{B}).$$

Por otra parte, para todo  $\ell \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k) \subset \bigcup_{n=\ell}^{\infty} \bigcup_{B(a, R) \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})} B(a, k R^\tau).$$

Por (2.2.2), se tiene que para  $s > 0$ , y para todo  $\ell \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\ell}^{\infty} \sum_{B(a,R) \in \mathcal{W}(n,\mathcal{B})} (kR^\tau)^s &\leq C \mu(\mathcal{B}) \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{(k\rho^{n\tau})^s}{\rho^{n(\alpha+\beta)}} \\ &= C \mu(\mathcal{B}) k^s \sum_{n=\ell}^{\infty} \rho^{n(s\tau-\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Si  $s > (\alpha + \beta)/\tau$  la suma es finita y en consecuencia  $M_s(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) = 0$ . Por lo tanto,

$$DH(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\tau}.$$

De igual manera, por (2.2.2) y la propiedad (3), se obtiene que para  $s > 0$  y para todo  $\ell \geq n_0$  (para que  $kR^\tau < R$ , si  $B(a, R) \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})$ ),

$$\begin{aligned} \sum_{n=\ell}^{\infty} \sum_{B(a,R) \in \mathcal{W}(n,\mathcal{B})} (\mu(B(a, kR^\tau)))^s &\leq C \mu(\mathcal{B}) \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{((k\rho^{n\tau})^\alpha \rho^{n\beta})^s}{\rho^{n(\alpha+\beta)}} \\ &= C \mu(\mathcal{B}) k^{\alpha s} \sum_{n=\ell}^{\infty} \rho^{n(s(\alpha\tau+\beta)-\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Si  $s > (\alpha + \beta)/(\alpha\tau + \beta)$  la suma es finita y, en consecuencia,  $M_s^\mu(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) = 0$ . Por lo tanto,

$$DH_\mu(A_1(\mathcal{B}, \mathcal{W}, \tau, k)) \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha\tau + \beta}. \quad \blacksquare$$

### 2.3. Sistemas bien distribuidos y resultados tipo Khintchine.

En [S2], D. Sullivan obtuvo la siguiente generalización del teorema clásico de Khintchine:

Sea  $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente que verifica

$$(3.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

$$(3.2) \quad \text{Existe } n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } n \geq n_1, \text{ si } 1/x_1, 1/x_2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n), \text{ entonces } F(x_1) \sim F(x_2) \text{ con } \rho \in (0, 1).$$

Sea  $\mathcal{H} = \{H(a_i, R_i)\}$  una familia de horobolas disjuntas en  $\mathbb{H}^{d+1}$  con puntos base en un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^d$ . Definimos

$$A_n = \{B(a_i, F(R_i^{-1})R_i) : H(a_i, R_i) \in \mathcal{H}, R_i \in [\rho^{n+1}, \rho^n)\}$$

y

$$A_\infty = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \in A_n \text{ para infinitos } n\}.$$



**Teorema (Sullivan).** Si  $\#A_n \sim \rho^{-nd}$ , entonces

$$m(A_\infty) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \int_1^\infty \frac{(F(x))^d}{x} dx = \infty,$$

donde  $m$  es la medida de Lebesgue.

Sea  $(W, \mu)$  un sistema bien distribuido con parámetro  $(\alpha, \beta, \rho)$ ,  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda$  y con  $\mu(B) < \infty$ , y  $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua positiva y decreciente que verifica (3.1) y (3.2) para el valor  $\rho$  asociado al sistema. Recordamos que,

$$A_2(B, W, F) = \{\xi \in \Lambda \cap B : \|\xi - a_i\| < F(R_i^{-1}) R_i \\ \text{para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in W \text{ con } a_i \in B\}.$$

En este contexto se tiene

**Teorema 3.**

$$\mu(A_2(B, W, F)) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \int_1^\infty \frac{(F(x))^\alpha}{x} dx = \infty.$$

Haremos uso de una versión del lema de Borel-Cantelli que describimos a continuación.

Sean  $(X, m)$  un espacio de probabilidad,  $A_1, A_2, \dots$  una sucesión de subconjuntos medibles de  $X$ , y  $A_\infty := \{x \in X : x \in A_i \text{ para infinitos } i\}$ .

**Lema (Borel-Cantelli).** Si  $m(A_\infty) > 0$ , entonces  $\sum_i m(A_i) = \infty$ . Y si los  $A_i$  son independientes, y si  $\sum_i m(A_i) = \infty$ , entonces  $m(A_\infty) > 0$ .

Pero es bien conocido que en el lema anterior no es necesario que los  $A_i$  sean exactamente independientes y basta con versiones débiles de cuasi-independencia. La siguiente condición es suficiente en nuestro caso.

**Lema (Borel-Cantelli cuasi-independiente).** Si existe  $C > 0$  tal que, para todo  $i < j$ ,  $m(A_i \cap A_j) \leq C m(A_i) m(A_j)$ , entonces

$$\sum_i m(A_i) = \infty \implies m(A_\infty) > 0.$$

Por la propiedad de equidistribución (1.4.ii) de  $(W, \mu)$  se tiene que existe  $n_0(B)$  tal que para todo  $n \geq n_0(B)$ ,

$$(3.3) \quad \#W(n, B) \sim \left(\frac{1}{\rho^n}\right)^{\alpha+\beta} \mu(B),$$

donde

$$\mathcal{W}(n, \mathcal{B}) = \{B(a, R) \in \mathcal{W} : a \in \mathcal{B}, R \in [\rho^{n+1}, \rho^n]\}.$$

Para todo  $n \geq n_0(\mathcal{B})$  definimos:

$$(3.4) \quad \tilde{A}_n = \{B(a_i, F(R_i^{-1})R_i) : B(a_i, R_i) \in \mathcal{W}(n, \mathcal{B})\}$$

y

$$A_n = \{B \cap \Lambda \cap \tilde{B}_n : \tilde{B}_n \in \tilde{A}_n\}.$$

En el siguiente lema veremos que los conjuntos  $A_n$  satisfacen la condición de cuasi-independencia a partir de un cierto valor de  $n$ .

**Lema 3.** *Existen  $C > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que cualesquiera que sean  $m, n$  tales que  $m > n \geq n_0$ , se cumple que*

$$\mu(A_n \cap A_m) \leq C \mu(A_n) \mu(A_m).$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que

$$(3.5) \quad \mu(A_n \cap A_m) \leq \sum_{\tilde{B}_n \in \tilde{A}_n} \sum_{\substack{\tilde{B}_m \in \tilde{A}_m \\ \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset}} \mu(\tilde{B}_m).$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ , se tiene que existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_2$ ,

$$F\left(\frac{1}{\rho^n}\right) \leq \lambda_0.$$

Por la propiedad (1.3) de  $(\mathcal{W}, \mu)$  y para el  $n_1$  de la condición (3.2) se obtiene que

(3.6) Si  $\tilde{B}_\ell \in \tilde{A}_\ell$  con  $\ell \geq \max\{n_1, n_2\}$ , entonces, para todo  $0 < t \leq 1$ ,

$$\mu(t\tilde{B}_\ell) \sim \left(t F\left(\frac{1}{\rho^\ell}\right) \rho^\ell\right)^\alpha \rho^{t\beta}.$$

Por lo tanto, como los centros de las bolas en  $\mathcal{W}(n, \mathcal{B})$  distan al menos  $\rho^{n+1}$  (propiedad (1.4.i) de  $(\mathcal{W}, \mu)$ ), usando (3.6), resulta que si

$$m > n \geq \max\{n_0(\mathcal{B}), n_1, n_2\},$$

entonces

$$(3.7) \quad \sum_{\substack{\tilde{B}_m \in \tilde{A}_m \\ \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset}} \mu(\tilde{B}_m) \sim \#\{\tilde{B}_m \in \tilde{A}_m : \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset\} \cdot \left(F\left(\frac{1}{\rho^m}\right) \rho^m\right)^\alpha \rho^{m\beta}.$$

Por otra parte, es fácil ver que existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_3$ ,

$$(3.8) \quad \bigcup_{\substack{\tilde{B}_m \in \tilde{A}_m \\ \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset}} \tilde{B}_m \subset c \tilde{B}_n,$$

con  $1 < c \leq \lambda_0$ . (Recordemos que  $\lambda_0$  es el parámetro de homotecia de  $\mu$ ).

Usando de nuevo (3.6) y la propiedad (1.4.i) de  $(W, \mu)$ , así como la propiedad (1.1) de homotecia de  $\mu$ , se concluye al comparar las  $\mu$ -medidas de los conjuntos en (3.8) que si  $m > n \geq \max\{n_0(\mathcal{B}), n_1, n_2, n_3\}$ , entonces

$$(3.9) \quad \#\{\tilde{B}_m \in \tilde{A}_m : \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_n \neq \emptyset\} \rho^{m(\alpha+\beta)} \leq c \left(F\left(\frac{1}{\rho^n}\right) \rho^n\right)^\alpha \rho^{n\beta}.$$

Se sigue, por (3.6), (3.8) y (3.9), que si  $m > n \geq n_0$ , con

$$n_0 = \max\{n_0(\mathcal{B}), n_1, n_2, n_3\},$$

entonces

$$\mu(A_n \cap A_m) \leq c \#W(n, \mathcal{B}) \left(F\left(\frac{1}{\rho^n}\right) \rho^n\right)^\alpha \rho^{n\beta} \left(F\left(\frac{1}{\rho^m}\right)\right)^\alpha,$$

y, por (3.3),

$$(3.10) \quad \mu(A_n \cap A_m) \leq C F\left(\frac{1}{\rho^n}\right)^\alpha F\left(\frac{1}{\rho^m}\right)^\alpha.$$

Finalmente, es de nuevo claro, por (3.3), (3.6) y (1.4.ii) que, para todo  $N \geq n_0$ ,

$$(3.11) \quad \mu(A_N) \sim \left(\frac{1}{\rho^N}\right)^{\alpha+\beta} \left(F\left(\frac{1}{\rho^N}\right) \rho^N\right)^\alpha \rho^{N\beta} \sim F\left(\frac{1}{\rho^N}\right)^\alpha.$$

La condición de cuasi-independencia se obtiene de (3.10) y (3.11). ■

OBSERVACIÓN. Si consideramos

$$\tilde{A}_n = \{B(a_i, CR_i) : B(a_i, R_i) \in W(n, \mathcal{B})\},$$

con  $C > 0$ , y además,  $A_n = \{\mathcal{B} \cap \Lambda \cap \tilde{B}_n : \tilde{B}_n \in \tilde{A}_n\}$ , es fácil verificar que los conjuntos  $A_n$  satisfacen la condición de de cuasi-independencia a partir de un cierto valor de  $n$ . Por tanto, se deduce que el conjunto

$$\begin{aligned} \text{Dir}(\mathcal{B}, W, C) = \{ \xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda : \|\xi - a_i\| < CR_i \\ \text{para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in W \text{ con } a_i \in \mathcal{B} \}, \end{aligned}$$

tiene  $\mu$ -medida positiva. Este es un resultado tipo Dirichlet.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3. De la definición de los conjuntos  $A_n$  (ver (3.4)) es claro que

$$A_2(\mathcal{B}, \mathcal{W}, F) = A_\infty := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \in A_i \text{ para infinitos } i \geq n_0\},$$

donde  $n_0$  es el número natural que nos asegura el lema anterior. Por el lema de Borel-Cantelli, se tiene que si  $\mu(A_\infty) > 0$ , entonces  $\sum_{i \geq n_0} \mu(A_i) = \infty$ .

Además, por el Lema 3 y la versión cuasi-independiente del lema de Borel-Cantelli, también se tiene el recíproco, es decir,

$$\sum_{i \geq n_0} \mu(A_i) = \infty \implies \mu(A_\infty) > 0.$$

Por otra parte, como ya hemos visto en la demostración del Lema 3 (ver (3.11)),

$$\mu(A_i) \sim F\left(\frac{1}{\rho^i}\right)^\alpha,$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{i \geq n_0} \mu(A_i) \sim \sum_{i \geq n_0} F\left(\frac{1}{\rho^i}\right)^\alpha.$$

Finalmente, por ser  $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente, se tiene que

$$\sum_{i \geq n_0} F\left(\frac{1}{\rho^i}\right)^\alpha = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \int_1^\infty F\left(\frac{1}{\rho^t}\right)^\alpha dt = \infty,$$

lo que, a su vez, equivale a que

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^\alpha}{x} dx = \infty. \quad \blacksquare$$



## Capítulo 3

### Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas de volumen finito

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad hiperbólica  $(d+1)$ -dimensional, no compacta y de *volumen finito*. La variedad  $\mathcal{M}$  es biholomorfa a  $\mathbb{H}^{d+1}/G$  donde  $G$  es un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  con elementos parabólicos y volumen finito. Además  $\mathcal{M}$  se puede descomponer en una unión disjunta  $\mathcal{M} \cong X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell$  donde  $X_0$  es compacta y los  $Y_\ell$  son cúspides (ver capítulo 1, secciones 1.1, 1.2).

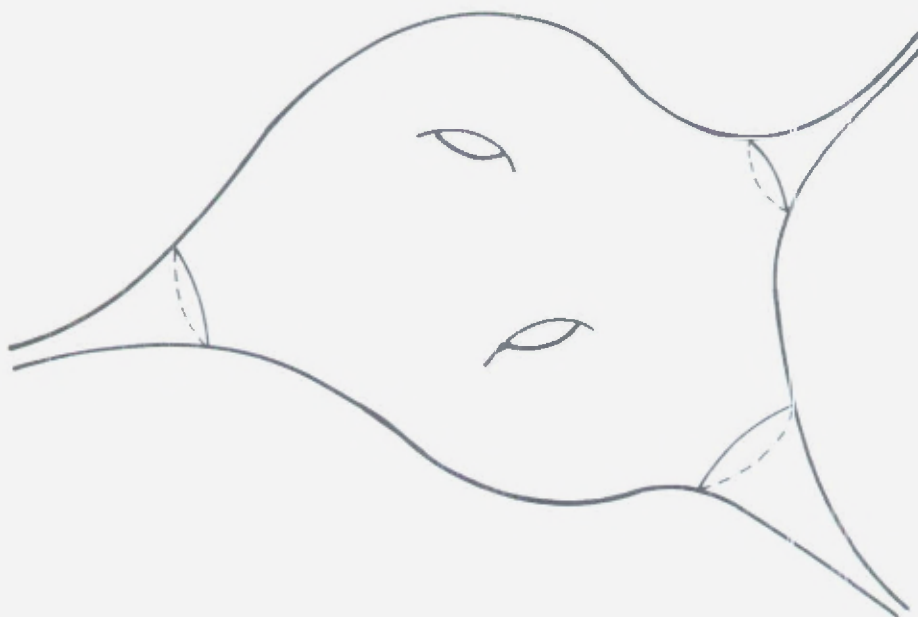


Figura 3

En la sección 1 de este capítulo estudiamos el conjunto de geodésicas en  $\mathcal{M}$  que partiendo de un punto fijo entran infinitas veces en las cúspides con velocidad “dada”.

Paralelamente en la sección 2 estudiamos el conjunto de geodésicas que partiendo de nuevo de un punto prefijado entran infinitas veces en un entorno fijo de

un punto de  $\mathcal{M}$ .

En ambas secciones los problemas sobre geodésicas se trasladan a  $\mathbb{R}^d$  estudiando los puntos finales de los levantamientos en  $\mathbb{H}^{d+1}$  de las geodésicas. Utilizamos entonces el concepto de sistema bien distribuido y los teoremas del capítulo 2. Puesto que  $\mathcal{M}$  tiene volumen finito, el conjunto límite de  $G$  es  $\mathbb{R}^d$  y la medida asociada a los sistemas bien distribuidos que construimos es la medida de Lebesgue.

### 3.1 Excursiones geodésicas en cúspides.

En [S1] D. Sullivan demostró que para todo par de puntos  $p, q \in \mathcal{M}$  y para casi toda dirección  $v \in S(q)$ , la esfera unidad en el espacio tangente  $T_p \mathcal{M}$ , se tiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}{\log t} = \frac{1}{d},$$

donde  $\text{dist}$  es la distancia en  $\mathcal{M}$  y  $\gamma_{q,v}(t)$  denota la geodésica en  $\mathcal{M}$  que parte de  $q$  con dirección  $v$ .

Por otra parte,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} = 1,$$

sólo para una cantidad numerable de direcciones  $v \in S(q)$ . Estas direcciones corresponden a las geodésicas que se van a infinito por las cúspides.

El teorema 4 da un resultado en términos de dimensión de Hausdorff que interpola entre estas dos situaciones.

**Teorema 4.** *Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,*

$$DH\left(\left\{v \in S(q) : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} \geq \alpha\right\}\right) = d(1 - \alpha).$$

En términos de aproximación por puntos fijos parabólicos de  $G$  el resultado obtenido es el siguiente. (Recordemos que  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$ ).

**Teorema 4'.** *Dados  $\tau > 1$  y una bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$ ,*

$$DH(\{\xi \in \mathcal{B} : |\xi - a_i| < C(\xi) R_i^\tau \text{ para infinitos } i\}) = \frac{d}{\tau},$$

donde  $\{H(a_i, R_i)\}$  es el conjunto de todas las horobolas asociadas a todas las cúspides de  $G$ .

De hecho se obtienen las siguientes versiones un poco mas precisas de los teoremas 4 y 4'.

Dada una dirección  $v \in S(q)$  y una cúspide  $Y$  definimos

$$T(Y, v) = \{t : \gamma_{q,v}(t) \in Y\}.$$

Sea  $\mathcal{Y} = \{Y_\ell\}$  un conjunto de cúspides de  $\mathcal{M}$ . El siguiente resultado se refiere a las geodésicas que entran infinitas veces en cada una de las cúspides  $Y_\ell$  de  $\mathcal{Y}$ .

**Teorema 5.** Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$DH\left(\left\{v \in S(q) : \limsup_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in T(Y_\ell, v)}} \frac{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} \geq \alpha, \text{ para toda } Y_\ell \in \mathcal{Y}\right\}\right) = d(1 - \alpha).$$

OBSERVACIÓN: Si  $h_\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  denota la función que asigna a cada punto  $s \in \mathcal{M}$  la altura alcanzada por  $s$  en la cúspide  $Y_\ell$ , es decir,

$$h_\ell(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \notin Y_\ell, \\ \text{dist}(s, \partial Y_\ell), & \text{si } s \in Y_\ell, \end{cases}$$

entonces es fácil ver que, para  $s \in Y_\ell$  y  $p \in \mathcal{M}$ ,

$$|\text{dist}(s, p) - h_\ell(s)| \leq c_\ell = \text{dist}(p, \partial Y_\ell).$$

En consecuencia

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in T(Y_\ell, v)}} \frac{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}{t} \geq \alpha$$

si y sólo si

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in T(Y_\ell, v)}} \frac{h_\ell(\gamma_{q,v}(t))}{t} \geq \alpha.$$

y el teorema 5 puede ser expresado en términos de alturas alcanzadas en las cúspides.

Sea  $P = \{p_\ell\}$  una colección finita de puntos fijos de transformaciones parabólicas del grupo  $G$ . Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 5'.** Dados  $\tau > 1$  y una bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$ ,

$$DH(\{\xi \in \mathcal{B} : |\xi - a_{\ell,i}| < c(\xi) R_{\ell,i}^\tau \text{ para infinitos } i \text{ y para todo } p_\ell \in P\}) = \frac{d}{\tau},$$

donde, para cada  $p_\ell$ ,  $\{H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})\}$  es el conjunto de las horobolas asociadas a la cúspide en  $p_\ell$ .

OBSERVACIÓN: Los teoremas 4' y 5' son válidos para cualquier subgrupo discreto de Möb( $\mathbb{H}^{d+1}$ ) con volumen finito y con elementos parabólicos. En particular, al aplicarlos a grupos bien conocidos como el grupo modular o el grupo de Picard se obtienen interesantes resultados de aproximación.

Cuando  $G = SL(2, \mathbb{Z})$ , esto es, el grupo modular, el conjunto de horodiscos asociados a la cúspide en  $\infty$  es

$$\left\{ H\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right) : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ con m.c.d.}(p, q) = 1 \right\},$$

y se obtiene el teorema clásico de Jarník-Besicovitch.

**Corolario 1** (Jarník-Besicovich). *Para cada  $\tau > 1$ ,*

$$DH\left(\left\{\xi \in \mathbb{R} : \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq c(\xi) \frac{1}{q^{2\tau}} \text{ para infinitos } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ con m.c.d.}(p, q) = 1\right\}\right) = \frac{1}{\tau}.$$

OBSERVACIÓN: Denotemos por  $A(\tau)$  el conjunto del corolario y por  $B(\tau)$  el conjunto

$$B(\tau) = \left\{\xi \in \mathbb{R} : \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2\tau}} \text{ para infinitos } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ con m.c.d.}(p, q) = 1\right\}.$$

Es fácil ver que para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $A(\tau + \varepsilon) \subset B(\tau) \subset A(\tau)$ , y entonces

$$\frac{1}{\tau + \varepsilon} = DH(A(\tau + \varepsilon)) \leq DH(B(\tau)) \leq DH(A(\tau)) = \frac{1}{\tau}.$$

Por lo tanto haciendo tender  $\varepsilon$  a cero se obtiene que  $DH(B(\tau)) = 1/\tau$ .

Al considerar el grupo de Picard  $SL(2, \mathbb{Z}(\sqrt{-1}))$ , o más generalmente  $G = SL(2, \mathcal{A})$  donde  $\mathcal{A}$  es el anillo de enteros de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$  y  $n$  es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto se obtiene (ver [S2]) que el conjunto de horobolas asociadas a la cúspide es

$$\left\{ H\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2|q|^2}\right) : p, q \in \mathcal{A} \text{ primos relativos} \right\}.$$

Decimos que  $p, q \in \mathcal{A}$  son *primos relativos* si existen  $r, s \in \mathcal{A}$  tales que  $pr + qs = 1$ . Se obtiene,

**Corolario 2.** *Para cada  $\tau > 1$ ,*

$$DH\left(\left\{\xi \in \mathbb{C} : \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq c(\xi) \frac{1}{|q|^{2\tau}} \text{ para infinitos } p, q \text{ primos relativos en } \mathcal{A}\right\}\right) = \frac{2}{\tau}.$$



Surge ahora de forma natural preguntarse por un resultado similar en dimensión superior. Usando la representación de transformaciones de Möbius por números de Clifford (ver capítulo 1, sección 1.7) se tiene que el grupo de Vahlen  $PSL(2, \mathcal{C}_{d-1}(\mathbb{Z}))$  es isomorfo a  $Möb(\mathbb{H}^{d+1})$ . Además, si denotamos por  $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$  el módulo de enteros del álgebra de Clifford  $\mathcal{C}_n$  y por  $SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))$  el subgrupo de  $SL(2, \mathcal{C}_n)$  con entradas en  $\mathcal{C}_n(\mathbb{Z})$  se tiene que

$$SL(2, \mathcal{C}_0(\mathbb{Z})) \cong SL(2, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad SL(2, \mathcal{C}_1(\mathbb{Z})) \cong SL(2, \mathbb{Z}(\sqrt{-1})).$$

Por tanto una generalización natural de los grupos modular y de Picard son los grupos  $SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))$ .

C. Maclachlan, P.L. Waterman y N.J. Wielenberg demuestran en [MWW] que  $SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))$  es un grupo aritmético finitamente generado de volumen finito. Podemos entonces aplicar el teorema 4' a este grupo.

Definimos  $\mathcal{O}_n = \{(p, q) \in \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}) \times \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}) : pq^{-1} \in SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))(\infty)\}$ .

**Corolario 3.** *Para cada  $\tau > 1$ ,*

$$DH(\{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - pq^{-1}| \leq c(\xi) \frac{1}{|q|^{2\tau}} \text{ para infinitos } (p, q) \in \mathcal{O}_{d-1}\}) = \frac{d}{\tau}.$$

En [MWW] se prueba también que

- (i)  $SL(2, \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}))(\infty) = \mathbb{Q}^3 \cup \{\infty\}$
- (ii)  $SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))(\infty) \subsetneq \mathbb{Q}^{n+1} \cup \{\infty\}$  para  $n \geq 3$ .

Por lo tanto, cuando  $G = SL(2, \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}))$  estamos aproximando puntos de  $\mathbb{R}^3$  por puntos de  $\mathbb{Q}^3$ . Sin embargo cuando  $G = SL(2, \mathcal{C}_n(\mathbb{Z}))$  con  $n \geq 3$  estamos aproximando puntos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  por puntos en un subconjunto de  $\mathbb{Q}^{n+1}$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 3.** Basta probar que  $pq^{-1}$  y  $\frac{1}{|q|^2}$  son respectivamente los puntos base y los diámetros de las horobolas asociadas a la cúspide en infinito de  $SL(2, \mathcal{C}_{d-1}(\mathbb{Z}))$ . Se procede de forma similar a la correspondiente demostración de D. Sullivan en [S2] para los grupos  $SL(2, \mathcal{A})$  donde  $\mathcal{A}$  el anillo de enteros de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$  con  $n$  entero positivo que no es un cuadrado perfecto.

La matriz

$$T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathcal{C}_{d-1}(\mathbb{Z}))$$

actúa sobre vectores  $x \in \mathbb{H}^{d+1}$  de la siguiente forma

$$T(x) = (px + r)(qx + s)^{-1}.$$

Como  $T(\infty) = pq^{-1}$ ,  $T$  lleva el hiperplano horizontal  $\{x_{d+1} = 1\}$  en una esfera con punto base  $pq^{-1} \in \mathbb{R}^d$ . Nos resta comprobar que su diámetro es  $|q|^{-2}$ .

Es fácil comprobar que la esfera isométrica de  $T^{-1}$  tiene ecuación  $|x - pq^{-1}| = 1/|q|$ . Además,  $T^{-1} = \Phi \circ \sigma$  donde  $\sigma$  es una reflexión sobre la esfera isométrica de  $T^{-1}$  y  $\Phi$  es la extensión de Poincaré de una isometría euclídea de  $\mathbb{R}^d$  (ver *eg.* [B, p.41]) y se tiene que  $T^{-1}$  transforma la esfera tangente a  $\mathbb{R}^d$  en  $pq^{-1}$  de diámetro  $|q|^{-1}$ , en el hiperplano  $\{x_{d+1} = |q|^{-1}\}$ .

Por lo tanto, la esfera en  $\mathbb{R}^d$  con punto base  $pq^{-1}$  y diámetro  $|q|^{-2}$  se transforma por  $T^{-1}$  en el hiperplano  $\{x_{d+1} = 1\}$ . ■

### 3.1.1 Demostración de los teoremas 5 y 5'.

Para demostrar el teorema 5 trasladaremos el problema sobre geodésicas en  $\mathcal{M} = \mathbb{H}^{d+1}/G$  a un problema sobre los puntos finales de las correspondientes geodésicas en  $\mathbb{H}^{d+1}$  y utilizaremos el teorema 5' sobre aproximación por elementos de  $G$ . Este último teorema se obtiene del teorema 2 (capítulo 2) una vez que se ha demostrado que si  $\{H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})\}$  es el conjunto de las horobolas asociadas a la cúspide  $Y_\ell$ , entonces  $\mathcal{W}_\ell = \{B(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})\}$  con la medida de Lebesgue es un sistema bien distribuido.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.** Sea  $\tilde{q}$  un levantamiento en  $\mathbb{H}^{d+1}$  del punto  $q \in \mathcal{M}$ . Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  denotemos por  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q},\xi}$  la geodésica en  $\mathbb{H}^{d+1}$  que parte de  $\tilde{q}$  y tiene punto final  $\xi$  y por  $\gamma_{q,v(\xi)}$  su proyección en  $\mathcal{M}$ .

La geodésica  $\gamma_{q,v(\xi)}$  verifica

$$(1.2.1) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{h_\ell(\gamma_{q,v(\xi)}(t))}{t} \geq \alpha,$$

donde  $h_\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  se define como

$$h_\ell(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \notin Y_\ell, \\ \text{dist}(s, \partial Y_\ell), & \text{si } s \in Y_\ell, \end{cases}$$

si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de tiempos  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$ , tal que  $\gamma_{q,v(\xi)}(t_i) \in Y_\ell$ , y

$$h_\ell(\gamma_{q,v(\xi)}(t_i)) \geq (\alpha - \varepsilon)t_i.$$

Como  $\gamma_{q,v(\xi)}(t_i) \in Y_\ell$  el punto  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q},\xi}(t_i)$  pertenece a una horobola  $H(a_{\ell,j(i)}, R_{\ell,j(i)})$  asociada a la cúspide  $Y_\ell$ . Por simplicidad en la notación escribiremos  $a_i$  y  $R_i$  en lugar de  $a_{\ell,j(i)}$  y  $R_{\ell,j(i)}$ .

Por lo tanto la geodésica  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface (1.2.1) si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y una sucesión de horobolas asociadas a  $Y_\ell$ ,  $\{H(a_i, R_i)\}$  tales que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q},\xi}(t_i) \in H(a_i, R_i)$  y

$$(1.2.2) \quad \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q},\xi}(t_i), \partial H(a_i, R_i)) \geq (\alpha - \varepsilon)t_i,$$

donde  $\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\cdot, \cdot)$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}^{d+1}$ .

Para  $t$  suficientemente grande la geodésica  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)$  es comparable a la geodésica vertical  $L_\xi$  con punto final  $\xi$ . Supongamos que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)$  coincide con la geodésica vertical.

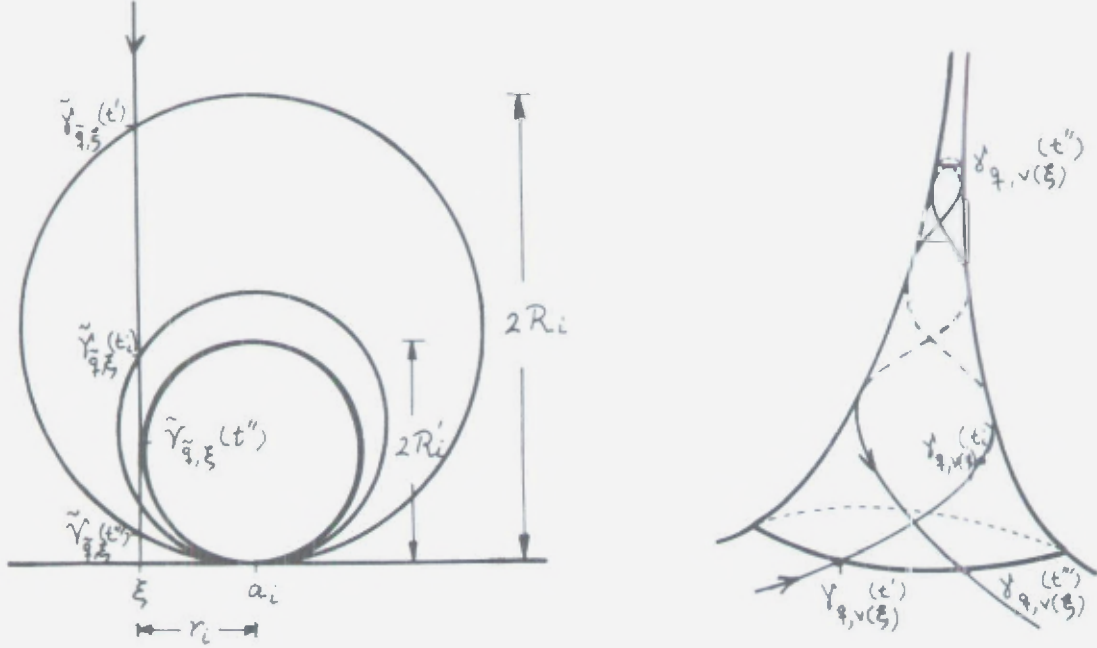


Figura 4

Los tiempos  $t'$ ,  $t''$  y  $t'''$  corresponden respectivamente a los tiempos de entrada, máxima altura y salida de la cúspide

Sea  $R'_i$  el radio de la horoesfera con punto base  $a_i$  que pasa por  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)$ , entonces

$$\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i), \partial H(a_i, R_i)) = \log \frac{R_i}{R'_i}.$$

Además,  $2R'_i = Ce^{-t_i}$  y de (1.2.2) se obtiene

$$\frac{R_i}{R'_i} \geq C \left( \frac{1}{R'_i} \right)^{\alpha - \varepsilon}.$$

Si  $r_i = |\xi - a_i|$  es claro que  $r_i \leq R'_i$ . Por lo tanto,  $R_i \geq Cr_i^{1-\alpha+\varepsilon}$ , y se obtiene

$$|\xi - a_i| \leq CR_i^{1/(1-\alpha+\varepsilon)}.$$

En general para  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)$  distinto de un rayo vertical se obtiene

$$(1.2.3) \quad |\xi - a_i| \leq C(\tilde{q}, \xi) R_i^{1/(1-\alpha+\varepsilon)}.$$



Por lo tanto, si para  $\varepsilon > 0$  existe  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{H(a_i, R_i)\}$  con  $a_i \neq \xi$  verificando (1.2.2), entonces la desigualdad (1.2.3) se verifica para infinitas horobolas asociadas a  $Y_\ell$ .

Si  $\xi = a_i$  para alguna horobola  $H(a_i, R_i)$  la geodésica  $\gamma_{q,v(\xi)}$  se va a infinito por la cúspide  $Y_\ell$ .

Recíprocamente, si para  $C > 0$  y  $\varepsilon' > 0$  la desigualdad

$$(1.2.4) \quad |\xi - a_i| \leq C R_i^{1/(1-\alpha+\varepsilon')}$$

se verifica para infinitas horobolas  $H(a_i, R_i)$  asociadas a  $Y_\ell$ . Entonces para todo  $\varepsilon > \varepsilon'$  existe una sucesión  $\{t_i(\varepsilon)\}$  con  $t_i(\varepsilon) \nearrow \infty$  que verifica (1.2.2).

Se concluye que si  $\gamma_{q,v(\xi)}$  no es una geodésica que se va a infinito por la cúspide  $Y_\ell$ . Entonces  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface (1.2.1) si y sólo si existe  $C > 0$  tal que para todo  $\varepsilon' > 0$  la desigualdad (1.2.4) se verifica para infinitas horobolas  $H(a_i, R_i)$  asociadas a  $Y_\ell$ .

Como el conjunto de los puntos base de todas las horobolas asociadas a cúspides de  $\mathcal{M}$  es numerable, el conjunto del teorema 5 tiene la misma dimensión de Hausdorff que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A(n\mathcal{B}, 1 - \alpha + 1/k)$$

donde  $\mathcal{B}$  es una bola en  $\mathbb{R}^d$  y  $A(n\mathcal{B}, 1 - \alpha + 1/k)$  es el conjunto de puntos  $\xi \in n\mathcal{B}$  tales que se verifica

$$|\xi - a_{\ell,i}| < C(\xi) R_{\ell,i}^{\frac{1}{1-\alpha+1/k}}$$

para infinitos  $i$  y para todo punto  $p_\ell \in P$  donde  $P = \{p_\ell\}$  el conjunto de puntos fijos parabólicos asociados a la familia de cúspides  $\mathcal{Y} = \{Y_\ell\}$ .

Recordemos que  $\{H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})\}$  son las horobolas asociadas a la cúspide  $Y_\ell$ .

El teorema 5' nos dice que  $DH(A(n\mathcal{B}, s)) = sd$  para todo  $0 < s < 1$ . Por tanto, para todo  $k > 1/\alpha$ ,

$$\begin{aligned} DH(A) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH\left(\bigcap_k A(n\mathcal{B}, 1 - \alpha + 1/k)\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH(A(n\mathcal{B}, 1 - \alpha + 1/k)) \\ &= d(1 - \alpha + 1/k). \end{aligned}$$

Haciendo tender  $k$  a infinito se obtiene que  $DH(A) \leq d(1 - \alpha)$ . Por otra parte, es fácil comprobar que  $A(n\mathcal{B}, 1 - \alpha) \subset A$  y se obtiene que  $DH(A) \geq d(1 - \alpha)$ . ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5'. Para todo  $p_\ell \in P$  definimos

$$\mathcal{W}_\ell = \{B_i = B(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})\}.$$



La idea de la demostración es ver que  $(W_\ell, m)$ , donde  $m$  es la medida de Lebesgue, es un sistema bien distribuido y utilizar el teorema 2 del capítulo 1 sobre conjuntos  $(W_\ell, \tau)$ -bien aproximables.

Es fácil comprobar que para  $(W_\ell, m)$  las condiciones (1.1), (1.2) y (1.3) de sistema bien distribuido se satisfacen con valores  $\alpha = d$  y  $\beta = 0$ .

La propiedad (1.5) de equidistribución requiere más trabajo. Se sigue del siguiente lema que es una versión local de una estimación de D. Sullivan ([S2, p.227]).

**Lema 4.** *Existe  $\rho_\ell \in (0, 1)$  tal que para toda bola  $B$  en  $\mathbb{R}^d$ , el conjunto  $T_n(B, Y_\ell)$  de horobolas correspondientes a la cúspide  $Y_\ell$  con puntos base en  $B$  y radio  $R \in [\rho_\ell^{n+1}, \rho_\ell^n]$  satisface, para todo  $n \geq n_0(B, Y_\ell, G)$ , que*

$$\#T_n(B, Y_\ell) \sim \left(\frac{1}{\rho_\ell^n}\right)^d m(B).$$

Obsérvese que la propiedad (1.4.ii) se satisface debido a que las horobolas son disjuntas.

Además como  $m$  es la medida de Lebesgue, para todo  $\tau > 1$ , se tiene que  $\alpha'_\ell(\tau) = d$  y  $\beta'_\ell(\tau) = 0$  y el teorema 2 nos dice que

$$DH\left(\bigcap_{p_i \in P} A_1(B, W_\ell, \tau)\right) = \frac{d}{\tau},$$

donde

$$A_1(B, W_\ell, \tau) := \{\xi \in B : \|\xi - a_i\| < C(\xi) R_i^\tau \\ \text{para infinitos } B_i = B(a_i, R_i) \in W_\ell \text{ con } a_i \in B\}.$$

Por lo tanto sólo resta probar el lema 4 para completar la demostración del teorema 5'.

En la demostración del lema 4 son necesarios algunos resultados previos sobre distribución de órbitas. El primero de ellos es una mejora debida a P. Nicholls [N1], [N2, p.204] de un resultado de Tsuji [Ts, p.518] sobre la distribución de las órbitas por un grupo discreto de volumen finito  $G$  de isometrías hiperbólicas de la bola unidad  $\mathbb{B}^{d+1}$ .

Dado  $\xi \in \partial\mathbb{B}^{d+1}$  y  $0 < w < \pi/2$ , definimos  $\Omega(\xi, w)$  como la intersección en  $\mathbb{B}^{d+1}$  del semicono sólido de eje  $0\xi$  y ángulo  $w$ , es decir,

$$\Omega(\xi, w) = \{\eta \in \mathbb{B}^{d+1} : |\langle \eta, \xi \rangle| \geq |\eta| \cos w\}.$$

Dado un subgrupo discreto  $\tilde{G}$  de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^{d+1})$  y  $\eta \in \mathbb{B}^{d+1}$  definimos  $N(r, \eta, \xi, w)$  como el número de transformaciones  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  tales que

$$\tilde{g}(\eta) \in \Omega(\xi, w) \cap \{x : \rho_{\mathbb{B}^{d+1}}(0, x) \leq r\},$$

donde  $\rho_{\mathbb{B}^{d+1}}(\cdot, \cdot)$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathbb{B}^{d+1}$

**Teorema** (Nicholls). *Existe  $r_0 > 0$  que depende de  $\eta$  tal que*

$$N(r, \eta, \xi, w) \sim e^{rd} w^d, \quad \text{para todo } r \geq r_0.$$

En el próximo lema se hace precisa una idea de D. Sullivan [S2].

**Lema 5.** *Sea  $H$  una horobola y  $G$  un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . Consideremos la siguiente suma con  $p_0, q_0 \in \mathbb{H}^{d+1}$*

$$S = \sum_{\substack{g \in G \\ g(q_0) \in \partial H}} e^{-\sigma \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, g(q_0))},$$

donde  $\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\cdot, \cdot)$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}^{d+1}$ .

*Si  $p_0 \notin H$ , entonces existe una constante  $c_1 = c_1(q_0, G)$  tal que para todo  $\sigma > \frac{d}{2}$*

$$S \leq c_1 e^{-\sigma \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, \partial H)}.$$

*De hecho,  $c_1$  sólo depende de*

$$L = \min\{\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(q_0, \eta(q_0)), \eta \in G \setminus \{id\}\}.$$

**OBSERVACIÓN:** Si  $p_0 \in H$ , entonces existe una constante  $c_2 = c_2(L)$  tal que para  $\sigma > \frac{d}{2}$  se tiene que  $S \leq c_2 e^{-(\sigma-d)\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, \partial H)}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos suponer, por conjugación, que  $\partial H$  es el hiperplano horizontal  $\{x_{d+1} = 1\}$  y  $p_0 = \lambda e_{d+1}$ , con  $e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$  y  $\lambda \leq 1$ .

Existe  $a = a(L) > 0$  tal que si  $P, Q \in \partial H$  y  $\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(P, Q) \geq L$ , entonces  $|P - Q| \geq a$ .

En  $\Omega_k = \{P \in \partial H : |P - e_{d+1}| \in [k-1, k)\}$  hay como máximo  $c(L)k^{d-1}$  puntos de la órbita de  $q_0$ ,  $G(q_0)$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Si  $P \in \Omega_k$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, P) &\geq \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, (k-1, 0, \dots, 0, 1)) \\ &= \rho_{\mathbb{H}^2}(i\lambda, (k-1) + i) \\ &\geq \log \frac{(k-1)^2 + (\lambda+1)^2}{4\lambda}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$e^{-\sigma \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(P, p_0)} \leq c \frac{\lambda^\sigma}{((k-1)^2 + (\lambda+1)^2)^\sigma} \leq c \left( \frac{\lambda}{k^2} \right)^\sigma.$$

Por lo tanto,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{g \in G \\ g(q_0) \in \Omega_k}} e^{-\sigma \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, g(q_0))} \leq c(L) \lambda^\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-d+1}} = c_1(L) e^{-\sigma \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, \partial H)}$$

puesto que  $\log(1/\lambda) = \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(p_0, \partial H)$ . ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\mathcal{B}$  está contenida en la bola unidad de  $\mathbb{R}^d$  y que tiene radio pequeño. Sea  $T$  una transformación de Möbius tal que  $T(\mathbb{H}^{d+1}) = \mathbb{B}^{d+1}$  y sea  $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$  la familia de horobolas en  $\mathbb{H}^{d+1}$  asociadas a la cúspide  $Y_\ell$  con puntos base en  $\mathcal{B}$  y radios  $R_i \leq 1$ . Entonces  $\{T(H_i)\}_{i=1}^{\infty}$  es una nueva familia de horobolas en  $\mathbb{B}^{d+1}$ . Además para todo  $i$  los radios  $R_i, R'_i$  de  $H_i$  y  $T(H_i)$  satisfacen, respectivamente,

$$c_1(\mathcal{B}) R_i \leq R'_i \leq c_2(\mathcal{B}) R_i.$$

Por lo tanto, por conjugación, podemos trabajar en  $\mathbb{B}^{d+1}$ . Probaremos el resultado para un subgrupo discreto de volumen finito  $\tilde{G}$  de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^{d+1})$ ,  $\mathcal{B}$  una bola en  $\partial \mathbb{B}^{d+1}$  e  $\hat{Y}_\ell$  una cúspide en un punto fijo parabólico de  $\tilde{G}$ . Denotaremos por  $\{H_i\}$  la familia de horobolas asociadas a la cúspide  $\hat{Y}_\ell$  y por  $R_i$  sus radios. En el resto de la demostración  $\rho(\cdot, \cdot)$  significará la distancia asociada a  $\mathbb{B}^{d+1}$ .

Fijemos una horobola  $H'$  de la familia  $\{H_i\}$  y un punto  $q$  en  $\partial H'$ .

Sea  $\xi \in \partial \mathbb{B}^{d+1}$  el centro de  $\mathcal{B}$  y  $w$  el ángulo del semicono con vértice en el origen cuya intersección con  $\partial \mathbb{B}^{d+1}$  es  $\mathcal{B}$ .

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , definimos

$$L(a, b) = \{x \in \mathbb{B}^{d+1} : \log(2e^a - 1) \leq \rho(0, x) < \log(2e^b - 1)\},$$

$$\mathcal{N}(a, b) = \#\{H_i : e^{-b} \leq R_i < e^{-a}\},$$

$$N(a) = N(a, q, \xi, w).$$

Recuérdese que  $N(a, q, \xi, w)$  es el número de elementos  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  tales que  $\rho(0, \tilde{g}(q)) \leq a$  y  $\tilde{g}(q)$  pertenece a la intersección con  $\mathbb{B}^{d+1}$  del semicono de eje  $0\xi$  y ángulo  $w$ .

Por otra parte, obsérvese que el radio  $R_i$  de una horobola  $H_i$  satisface que  $e^{-b} \leq R_i < e^{-a}$  si y sólo si el punto de  $H_i$  más cercano al origen pertenece a  $L(a, b)$ .

La órbita de  $q$  está formada por puntos en las horoesferas  $\partial H_i$ . Además, como las cúspides son de rango maximal existe  $c = c(\tilde{G}) > 0$  tal que para todo punto  $p \in \partial H_i$  existe  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  tal que  $\tilde{g}(p) \in \partial H_i$  y  $\rho(\tilde{g}(p), p) \leq c$ .

Por lo tanto, existe  $k_0 = k_0(\tilde{G})$  tal que si  $H_i$  es una horobola de radio  $R_i \geq e^{-b}$ , entonces  $L(b, b + k_0)$  contiene al menos un punto  $\tilde{g}(q) \in \partial H_i$ . En consecuencia, para  $T, K > 0$

$$\mathcal{N}(T, T + K) \leq N(\log(e^{T+K+k_0} - 1)).$$

Del teorema de Nicholls (ver página 60) se obtiene que existe  $T_0 > 0$  tal que, para todo  $T \geq T_0$ ,

$$(1.2.5) \quad \mathcal{N}(T, T + K) \leq c(\tilde{G}, K) w^d e^{d(T+K)}.$$

Veremos que existe  $T'_0 > 0$  tal que, para todo  $T \geq T'_0$ , se verifica una desigualdad opuesta,

$$(1.2.6) \quad c'(\tilde{G}, K_0) w^d e^{dT} \leq \mathcal{N}(T, T + K_0),$$

para  $K_0$  suficientemente grande.

Como las constantes en (1.2.5) y (1.2.6) son independientes de  $T$ , concluimos que para  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $T \geq \max\{T_0, T'_0\}$ ,

$$(1.2.7) \quad \begin{aligned} c'(\tilde{G}, K_0) w^d e^{d(T+nK_0)} &\leq \mathcal{N}(T + nK_0, T + (n+1)K_0) \\ &\leq c(\tilde{G}, K) w^d e^{d(T+(n+1)K_0)}. \end{aligned}$$

Sea  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $n_0 K_0 \geq \max\{T_0, T'_0\}$  y sea  $T = n_0 K_0$ . Entonces, por (1.2.7), para  $n \geq n_0$  se tiene que

$$c'(\tilde{G}, K_0) w^d e^{dnK_0} \leq \mathcal{N}(nK_0, (n+1)K_0) \leq c(\tilde{G}, K) w^d e^{d(n+1)K_0}.$$

Finalmente, tomando  $\tilde{\rho}_\ell = e^{-K_0}$ ,

$$\#T_n(\mathcal{B}, \tilde{Y}_\ell) = \mathcal{N}(nK_0, (n+1)K_0)$$

y se obtiene el resultado.

Para probar (1.2.6) consideramos la siguiente suma

$$S(T, K) = \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \cap L(T, T+K) \\ e^{-(T+K)} \leq R_i < e^{-T}}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))},$$

donde  $d/2 < \sigma < d$ . Obsérvese que

$$S(T, K) \leq \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \\ e^{-(T+K)} \leq R_i < e^{-T}}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))}$$



y por el lema 5

$$(1.2.8) \quad S(T, K) \leq c \mathcal{N}(T, T+K) e^{-\sigma T}.$$

Por tanto, para probar (1.2.6) es suficiente obtener una cota inferior de  $S(T, K)$ .

Consideremos ahora las siguientes sumas parciales:

$$S_1(T, K) = \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \cap L(T, T+K) \\ R_i \geq e^{-T}}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))},$$

$$S_2(T, K) = \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \cap L(T, T+K)}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))}.$$

Como  $\partial H_i \cap L(T, T+K) \neq \emptyset$ , sóloamente si  $R_i \geq e^{-(T+K)}$ , tenemos que

$$(1.2.9) \quad S_2(T, K) - S_1(T, K) = S(T, K).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} S_1(T, K) &\leq \sum_{j=2}^{[T+1]} \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \cap L(T, T+K) \\ e^{-j} \leq R_i < e^{-(j-1)}}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))} + \sum_{\substack{\tilde{g} \in \tilde{G} \\ \tilde{g}(q) \in \partial H_i \cap L(T, T+K) \\ e^{-1} \leq R_i < 1/2}} e^{-\sigma \rho(0, \tilde{g}(q))} \\ &\leq \sum_{j=2}^{[T+1]} (e^{j-1} - 1)^{-\sigma} N(\log(e^j - 1)) + N(\log(e - 1)) \\ &\leq 2^\sigma \sum_{j=1}^{[T+1]} e^{-\sigma(j-1)} N(\log(e^j - 1)), \end{aligned}$$

y

$$S_2(T, K) \geq e^{-\sigma(T+K)} (N(\log(e^{T+K} - 1)) - N(\log(e^T - 1))),$$

donde  $[\cdot]$  denota la parte entera.

Por el teorema de Nicholls, existe  $s_0 > 0$  tal que para todo  $s \geq s_0$ ,

$$N(\log(e^j - 1)) \sim w^d e^{s d}.$$

Por lo tanto existe  $T'_0 > 0$  tal que, para todo  $T \geq T'_0$ ,

$$S_1(T, K) \leq c(\tilde{G}) w^d e^{(d-\sigma)T},$$

$$S_2(T, K) \geq c(\tilde{G}, K) w^d e^{(d-\sigma)(T+K)},$$

con  $c(\tilde{G}, K) = c(\tilde{G})(1 - e^{-dK})$ .

Por (1.2.9) se concluye que, para todo  $T \geq T_0$ ,

$$S(T, K) \geq w^d e^{(d-\sigma)T} (c(\tilde{G}, K) e^{(d-\sigma)K} - c(\tilde{G})).$$

Tomando  $K_0$  suficientemente grande para que  $c(\tilde{G}, K) e^{(d-\sigma)K} - c(\tilde{G}) > c > 0$ , se obtiene, para todo  $T \geq T_0$ ,

$$(1.2.10) \quad S(T, K_0) \geq c w^d e^{(d-\sigma)T}.$$

La desigualdad (1.2.6) es ahora una consecuencia de (1.2.8) y (1.2.10). ■

### 3.2. Excursiones geodésicas en entornos de puntos de $\mathcal{M}$ .

Para todo par de puntos  $p, q \in \mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  estudiamos las geodésicas que partiendo de  $q$  se acercan infinitas veces al punto  $p$ . Obtenemos los siguientes resultados.

**Teorema 6.** Sea  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  una familia finita de puntos de  $\mathcal{M}$ . Para todo  $\alpha > 0$ ,

$$DH\left(\left\{v \in S(q) : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p_i)}}{t} \geq \alpha, \text{ para todo } p_i \in P\right\}\right) = \frac{d}{1+\alpha}.$$

**Teorema 7.** Para casi toda dirección  $v \in S(q)$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v}(t), p)}}{\log t} = \frac{1}{d}.$$

En términos de aproximación por elementos de  $G$  los resultados obtenidos son los siguientes.

**Teorema 6'.** Dados  $\tau > 1$ , una bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$  y  $\tilde{P} = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k\}$  una colección finita de puntos en  $\mathbb{H}^{d+1}$ ,

$$DH(\{\xi \in \mathcal{B} : |\xi - x_{\tilde{p}}| \leq c(\xi) s_{\tilde{p}}^\tau \text{ para infinitos}$$

$$g(\tilde{p}) = (x_{\tilde{p}}, s_{\tilde{p}}) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1) \text{ con } g \in G \text{ y para todo } \tilde{p} \in \tilde{P}\}) = \frac{d}{\tau}.$$

Sea  $\tilde{p}$  un punto en  $\mathbb{H}^{d+1}$ . Sea  $F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente que verifica lo siguiente:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ .
- (ii) Existen  $\rho \in (0, 1)$  y  $n_1 \in \mathbb{N}$  tales que, para todo  $n \geq n_1$ , si  $1/x_1, 1/x_2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ , entonces  $F(x_1) \sim F(x_2)$ .

**Teorema 7'.** Para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  se tiene que existen infinitos  $g \in G$ , con  $g(\tilde{p}) = (x_{\tilde{p}}, s_{\tilde{p}}) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1)$ , que verifican

$$|\xi - x_{\tilde{p}}| < c(\xi) F\left(\frac{1}{s_{\tilde{p}}}\right) s_{\tilde{p}},$$

si y sólo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^d}{x} dx = \infty.$$

### 3.2.1. Demostraciones de los teoremas.

La idea para obtener los resultados sobre excursiones geodésicas de los teoremas 6 y 7 es de nuevo trasladar el problema a  $\mathbb{R}^d$  y utilizar los teoremas 6' y 7' sobre aproximación por elementos de  $G$ . Como veremos estos resultados de aproximación se obtienen de los teoremas 2 y 3 (capítulo 2) para un sistema bien distribuido particular.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.** Sean  $\tilde{p}_i, \tilde{q}$  levantamientos en  $\mathbb{H}^{d+1}$  de los puntos  $p_i, q \in \mathcal{M} = \mathbb{H}^{d+1}/G$ . Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  la geodésica  $\gamma_{q, v(\xi)}$  satisface

$$(2.1.1) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q, v(\xi)}(t), p)}}{t} \geq \alpha,$$

si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de tiempos  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y una sucesión  $\{g_i\}$  en  $G$  tales que

$$(2.1.2) \quad \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq e^{-(\alpha - \varepsilon)t_i}.$$

Además para  $t$  suficientemente grande la geodésica  $\gamma_{\tilde{q}, \xi}(t)$  es comparable a la geodésica vertical con punto final  $\xi$  y en consecuencia

$$\pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \sim e^{-t_i},$$

donde  $\pi_{d+1}$  es la proyección en la coordenada  $d+1$ . Las constantes de comparabilidad dependen de  $\tilde{q}$  y  $\xi$ .

Por lo tanto si existen  $\{t_i\}$ , con  $t_i \nearrow \infty$ , y  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando (2.1.2) se obtiene

$$\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq c(\xi, \tilde{q}) \pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i))^{\alpha - \varepsilon},$$

con  $c(\xi, \tilde{q}) > 0$ .

Recíprocamente, si para  $C > 0$ , existe  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$  tales que

$$\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq C \pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i))^{\alpha - \varepsilon'},$$

entonces, para todo  $\varepsilon > \varepsilon'$ , existe  $T_\varepsilon$  tal que, para todo  $t_i \geq T_\varepsilon$ , se verifica (2.1.2).

En consecuencia se tiene que  $\gamma_{q, v(\xi)}$  satisface (2.1.2) si y sólo si existe  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existen sucesiones  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando

$$\rho(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq C \pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i))^{\alpha - \varepsilon},$$

o equivalentemente existe  $C' > 0$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existen  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$ , y  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando

$$(2.1.3) \quad \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i) \in B_h(g_i(\tilde{p}), C' \pi_{d+1}(g_i(\tilde{p}))^{\alpha - \varepsilon}),$$

donde  $B_h(a, R)$  denota la bola hiperbólica de centro  $a$  y radio  $R$ .

Para todo  $(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ , definimos la *sombra* de  $B_h((x, s), R)$  en  $\mathbb{R}^d$  como el conjunto de puntos  $x' \in \mathbb{R}^d$  tales que  $(x', s') \in B_h((x, s), R)$  para algún  $s' > 0$ . Como  $B_h((x, s), R) = B((x, s \cosh R), s \sinh R)$  se tiene que para  $R$  pequeño la sombra de  $B_h((x, s), R)$  es comparable a la bola  $B(x, sR)$  en  $\mathbb{R}^d$ .

Por lo tanto por (2.1.3) es claro que el conjunto del teorema 6 tiene la misma dimensión de Hausdorff que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A(n\mathcal{B}, 1 + \alpha - 1/k),$$

donde  $\mathcal{B}$  es una bola en  $\mathbb{R}^d$  y

$$A(n\mathcal{B}, 1 + \alpha - 1/k) = \{\xi \in n\mathcal{B} : |\xi - x_{\tilde{p}}| < c(\xi) s_{\tilde{p}}^{1+\alpha-1/k} \text{ para infinitos } g(\tilde{p}) = (x_{\tilde{p}}, s_{\tilde{p}}) \text{ con } s_{\tilde{p}} \searrow 0 \text{ y para todo } p \in P\}.$$

Puesto que  $G$  es discreto los conjuntos  $A(n\mathcal{B}, l)$  con  $l > 1$  son, de hecho, los conjuntos que aparecen en el teorema 6 y en consecuencia  $DH(A(n\mathcal{B}, l)) = d/l$ , para todo  $l > 1$ . Por tanto, para todo  $k > 1/\alpha$ ,

$$\begin{aligned} DH(A) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH\left(\bigcap_k A(n\mathcal{B}, 1 + \alpha - 1/k)\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH(A(n\mathcal{B}, 1 + \alpha - 1/k)) \\ &= d(1 + \alpha - 1/k). \end{aligned}$$

Haciendo tender  $k$  a infinito se obtiene que  $DH(A) \leq d/(1 + \alpha)$ . Por otra parte, es fácil comprobar que  $A(n\mathcal{B}, 1 + \alpha) \subset A$ , de donde  $DH(A) \geq d/(1 + \alpha)$ . ■



DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7. Sean  $\tilde{p}, \tilde{q}$  levantamientos en  $\mathbb{H}^{d+1}$  de  $p, q \in \mathcal{M}$ . Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  la geodésica  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface

$$(2.1.4) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \geq \frac{1}{d},$$

si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$ , tales que

$$(2.1.5) \quad \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq \frac{1}{t_i^{(1/d) - \varepsilon}}.$$

Además, como para  $t$  grande  $\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)$  es comparable a la geodésica vertical con punto final  $\xi$ , se tiene que  $\pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)) \sim e^{-t}$ , donde  $\pi_{d+1}$  es la proyección en la coordenada  $d+1$ .

Por lo tanto, si existen  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando (2.1.5), entonces

$$\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq c(\xi, \tilde{q}) \left( \frac{1}{\log \frac{1}{\pi_{d+1}(\gamma_{\tilde{q}, \xi}(t_i))}} \right)^{(1/d) - \varepsilon}$$

con  $c(\xi, \tilde{q}) > 0$ .

Recíprocamente, si para  $C > 0$ , existe  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$  tales que

$$\rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g_i(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i)) \leq C \left( \frac{1}{\log \frac{1}{\pi_{d+1}(\gamma_{\tilde{q}, \xi}(t_i))}} \right)^{(1/d) - \varepsilon'},$$

entonces, para todo  $\varepsilon > \varepsilon'$ , existe  $T_\varepsilon$  tal que para todo  $t_i \geq T_\varepsilon$  se verifica (2.1.5).

Por lo tanto se tiene que  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface (2.1.4) si y sólo si existe  $C' > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existen sucesiones  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando

$$(2.1.6) \quad \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t_i) \in B_h \left( g_i(\tilde{p}), C' \left( \frac{1}{\log \frac{1}{\pi_{d+1}(g_i(\tilde{p}))}} \right)^{(1/d) - \varepsilon} \right).$$

Además, para  $(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$  y  $R$  pequeño, la sombra de  $B_h((x, s), R)$  en  $\mathbb{R}^d$  es comparable a la bola  $B(x, sR)$ . Por lo tanto se obtiene que

$$(i) \quad \pi_{d+1}(g_i(\tilde{p})) \searrow 0,$$

$$(ii) \quad \xi \in B \left( x_i, C \left( \frac{1}{\log \frac{1}{s_i}} \right)^{(1/d) - \varepsilon} s_i \right), \text{ donde } g_i(\tilde{p}) = (x_i, s_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+.$$

Como  $G$  es discreto, hay una sucesión  $\{g_i\}$  en  $G$  verificando (i) y (ii), si y sólo si existe una sucesión  $\{\tilde{g}_i\}$  en  $G$  verificando (ii) con  $\tilde{g}_i(\tilde{p}) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1)$ . Por lo tanto  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface (2.1.4) si y sólo si existe  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$(2.1.7) \quad \xi \in B\left(x, C\left(\frac{1}{\log \frac{1}{s}}\right)^{(1/d)-\varepsilon} s\right), \quad \text{con } g(\tilde{p}) = (x, s),$$

para infinitos  $g \in G$  con  $\pi_{d+1}(g(\tilde{p})) < 1$ .

Para todo  $\sigma > 0$ , definimos

$$F_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [1, e), \\ \frac{1}{(\log x)^{1/\sigma}}, & \text{si } x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Estas funciones satisfacen las condiciones del teorema 7'. Además

$$(2.1.8) \quad \int_1^\infty \frac{F_\sigma(x)^d}{x} dx = \begin{cases} \infty, & \text{si } \sigma \geq d, \\ \frac{\sigma}{d-\sigma}, & \text{si } 0 < \sigma < d. \end{cases}$$

Es claro, por (2.1.7), que

$$\bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \geq \frac{1}{d} \right\},$$

donde  $A(F_\sigma, C)$  es el conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tales que

$$|\xi - x| < C F_\sigma\left(\frac{1}{s}\right) s, \quad \text{con } g(\tilde{p}) = (x, s) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1),$$

se verifica para un número infinito de  $g \in G$ .

Por (2.1.8), el teorema 7' nos dice que el conjunto  $\bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C)$  tiene medida plena y por tanto, para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \geq \frac{1}{d}.$$

Para concluir la demostración debemos comprobar que para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  se verifica también la desigualdad opuesta. La geodésica  $\gamma_{q,v(\xi)}$  satisface

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q,v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \leq \frac{1}{d}$$

si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $T_\varepsilon$  tal que, para todo  $t \geq T_\varepsilon$  y para todo  $g \in G$ ,

$$(2.1.9) \quad \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(g(\tilde{p}), \tilde{\gamma}_{\tilde{q}, \xi}(t)) \geq \frac{1}{t^{(1/d)+\varepsilon}}.$$

Con un razonamiento similar al utilizado para concluir (2.1.7) de (2.1.5) se obtiene que (2.1.9) es equivalente a que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista  $0 < s_\varepsilon < 1$  tal que, para todo  $g(\tilde{p}) = (x, s)$  con  $s \leq s_\varepsilon$ , se verifique

$$\xi \notin B\left(x, C\left(\frac{1}{\log \frac{1}{s}}\right)^{(1/d)+\varepsilon} s\right),$$

con  $C$  una constante positiva.

Por este resultado es claro que

$$\bigcup_{C>0} \bigcap_{0<\sigma<d} A(F_\sigma, C)^c \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q, v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \leq \frac{1}{d} \right\},$$

donde  $A(F_\sigma, C)^c$  es el conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tales que

$$|\xi - x| < C F_\sigma\left(\frac{1}{s}\right) s, \quad \text{con } g(\tilde{p}) = (x, s) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1),$$

se verifica sólo para un número finito de  $g \in G$ .

Por (2.1.8) y el teorema 7' se tiene que el conjunto  $\bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C)^c$  tiene medida plena para  $0 < \sigma < d$ . Además, para  $\sigma_1 < \sigma_2$ ,

$$\bigcup_{C>0} A(F_{\sigma_2}, C) \subset \bigcup_{C>0} A(F_{\sigma_1}, C)$$

y, por consiguiente,  $\bigcap_{0<\sigma<d} \bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C)^c$  tiene medida plena.

Por lo tanto, para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\text{dist}(\gamma_{q, v(\xi)}(t), p)}}{\log t} \leq \frac{1}{d}. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 6' Y 7'.

Para demostrar estos teoremas utilizaremos los teoremas 2 y 3 (capítulo 2) de aproximación para sistemas bien distribuidos. El primer paso será ver que, para todo  $\tilde{p} \in \mathbb{H}^{d+1}$ , el conjunto

$$\mathcal{W}_{\tilde{p}} = \{B(x, s) : g(\tilde{p}) = (x, s) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1) \text{ con } g \in G\}$$

es un sistema bien distribuido con la medida de Lebesgue. Para ello necesitaremos el siguiente lema que se sigue directamente del teorema de Nicholls (ver página 60)

**Lema 6.** Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $Möb(\mathbb{H}^{d+1})$  de volumen finito. Para todo  $\tilde{p} \in \mathbb{H}^{d+1}$  existe  $\rho_{\tilde{p}} \in (0, 1)$  tal que para toda bola  $B$  en  $\mathbb{R}^d$  el conjunto  $T_n(B, \tilde{p})$  de puntos de la órbita de  $p$ ,  $g(\tilde{p}) = (x, s)$ , con  $x \in B$  y  $s \in [\rho_{\tilde{p}}^{n+1}, \rho_{\tilde{p}}^n]$  satisface, para todo  $n \geq n_0(B, \tilde{p})$ ,

$$\#T_n(B, \tilde{p}) \sim \left(\frac{1}{\rho_{\tilde{p}}}\right)^d m(B).$$

**Lema 7.**  $(\mathcal{W}_{\tilde{p}}, m)$  es un sistema bien distribuido con parámetro  $(d, 0, \rho_{\tilde{p}})$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Por el lema 6 es claro que  $(\mathcal{W}_{\tilde{p}}, m)$  cumple la propiedad de equidistribución (1.4.i). La propiedad (1.4.ii) se sigue del hecho de que, para  $n$  suficientemente grande, y para todo  $g_1, g_2 \in G$ ,  $(g_1 \neq g_2)$  con  $g_i(\tilde{p}) = (x_i, s_i) \in \mathbb{R}^d \times (0, \rho_{\tilde{p}}^n)$  para  $i = 1, 2$ , se verifica que

$$B_h(g_1(\tilde{p}), s_1) \cap B_h(g_2(\tilde{p}), s_2) = \emptyset.$$

Las propiedades restantes de sistema bien distribuido se comprueban fácilmente.

El lema 7 y el teorema 2 (capítulo 2) nos dan directamente el teorema 6'. Por otra parte, del lema 5 y el teorema 3 es claro que para todo  $C > 0$  el conjunto

$$A(F, C) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - r_{\tilde{p}}| < C F\left(\frac{1}{s_{\tilde{p}}}\right) s_{\tilde{p}} \right. \\ \left. \text{para infinitos } g(\tilde{p}) = (x_{\tilde{p}}, s_{\tilde{p}}) \in \mathbb{R}^d \times (0, 1) \right\}$$

tiene medida positiva si y sólo si

$$\int_1^\infty \frac{F(x)^d}{x} dx = \infty$$

Pero  $A = \cup_{C>0} A(F, C)$  es un conjunto  $G$ -invariante y la acción de  $G$  es ergódica en  $\mathbb{R}^d$  (ver capítulo 1, sección 1.6). Por lo tanto, el conjunto  $A$  tiene medida plena o medida cero y esto demuestra el teorema 7'. ■



## Capítulo 4

### Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas geométricamente finitas sin cúspides

#### 4.1. Introducción.

En los capítulos 4 y 5 consideramos una variedad hiperbólica  $\mathcal{M}$  de dimensión  $d+1$  y geométricamente finita. Recordemos que en el caso dos-dimensional, es decir, para superficies de Riemann, la condición de ser geométricamente finitas, coincide con el hecho de que el grupo fundamental sea finitamente generado.

El estudio se ha dividido en dos. En el capítulo 4, se consideran variedades convexas co-compactas, esto es, sin cúspides. La medida de Patterson tiene estimaciones precisas que permiten resultados exactos en los problemas de aproximación considerados.

En el capítulo 5, se considera el caso general; el control sobre la medida de Patterson no es tan bueno y el estudio de los problemas de aproximación es más delicado, y los resultados no son exactos. Aunque hay cierto solapamiento entre estos dos capítulos hemos preferido dividir el análisis para mayor claridad.

La variedad  $\mathcal{M}$  es biholomorfa a  $\mathbb{H}^{d+1}/G$ , donde  $G$  es un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ , y el espacio cociente  $\mathcal{M}_G = H(\Lambda(G))/G$ , donde  $H(\Lambda(G))$  es la envolvente convexa del conjunto límite  $\Lambda(G)$ , es compacto (ver capítulo 1, secciones 1.1, 1.2).

En el caso de superficies de Riemann ( $d = 1$ )  $\mathcal{M}$  puede descomponerse en la unión disjunta  $\mathcal{M} \cong X_0 \cup \bigcup_{s=1}^n Z_s$ , donde  $X_0$  es compacta y los  $Z_s$  son *foniles* (ver figura 5).

Dada una geodésica cerrada dirigida  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{M}$  estudiamos el conjunto de geodésicas en  $\mathcal{M}$  que partiendo de un punto prefijado  $p$  se “acercan” infinitas veces a  $\mathcal{G}$  con determinada velocidad. Más específicamente, la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  estará cerca de  $\mathcal{G}$  en un tiempo  $t_0$  si existe  $t'_0$  tal que la distancia en  $\mathcal{M}$  entre  $\gamma_{p,v}(t_0)$  y  $\mathcal{G}(t'_0)$  es pequeña y además las direcciones de  $\gamma_{p,v}(t)$  y  $\mathcal{G}(t)$  en los puntos  $t_0$  y  $t'_0$  respec-

tivamente difieren también poco. La distancia  $d_{\Omega(\mathcal{M})}$  (definida en cap. 1, sec. 1.6) formaliza esta idea de distancia en  $\Omega(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \times \partial\mathbb{B}^{d+1}$ . Obsérvese que  $\mathcal{M}$  puede ser compacta.



Figura 5

Sea  $\mathcal{V} = \{\mathcal{G}_\ell(t)\}_{t \in \mathcal{L}}$  una colección finita de geodésicas cerradas dirigidas en  $\mathcal{M}$ . Para cada  $\mathcal{G}_\ell$  definimos

$$\Omega(\mathcal{G}_\ell) = \{(\mathcal{G}_\ell(t), \mathcal{G}'_\ell(t))\}.$$

Para  $p \in \mathcal{M}$  y  $\mu$  la medida en  $S(p)$  inducida por la medida de Patterson (ver capítulo 1, sección 1.6), obtenemos los siguientes resultados.

**Teorema 8.** Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , sea  $L(\mathcal{V}, \alpha)$  el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{\bar{p}, v}(t), \gamma'_{\bar{p}, v}(t)), \Omega(\mathcal{G}_\ell))}}{t} \geq \alpha,$$

para toda  $\mathcal{G}_\ell \in \mathcal{V}$ . Entonces

$$DH(L(\mathcal{V}, \alpha)) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \delta(G)$$

y

$$DH_\mu(L(\mathcal{V}, \alpha)) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

donde  $\delta(G)$  es el exponente de convergencia de  $G$ .

**Teorema 9.** *Sea  $\mathcal{G}$  una geodésica cerrada dirigida en  $\mathcal{M}$ . Para casi toda dirección  $v \in S(p)$  con respecto a  $\mu$ , se tiene que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v}(t), \gamma'_{p,v}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} = \frac{1}{2\delta(G)}.$$

En términos de aproximación por un grupo se obtienen los siguientes resultados para  $G$  un subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  convexo co-compacto. Recordemos que  $G$  es convexo co-compacto si la acción de  $G$  sobre la envolvente convexa del conjunto límite  $\Lambda(G)$  tiene una región fundamental compacta (o, equivalentemente,  $G$  es geoméricamente finito y sin cúspides).

Sea  $\Xi$  una colección finita de puntos fijos hiperbólicos no conjugados entre sí. Recordemos que dos puntos fijos hiperbólicos son conjugados si son los puntos fijos de una misma transformación de Möbius hiperbólica.

**Teorema 8'.** *Dados  $\tau > 1$  y una bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$ , sea  $L'(\mathcal{B}, \Xi, \tau)$  el conjunto de puntos  $\xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda(G)$  tales que para todo  $\eta \in \Xi$  se verifica para infinitos  $g \in G$  que*

$$\|\xi - g(\eta)\| < c(\xi) R_g^\tau,$$

donde

$$R_g = \frac{\|g(\eta') - g(\eta)\|}{2},$$

y  $\eta'$  es el punto fijo hiperbólico conjugado de  $\eta$ . Entonces,

$$DH(L'(\mathcal{B}, \Xi, \tau)) = \frac{\delta(G)}{\tau},$$

$$DH_\mu(L'(\mathcal{B}, \Xi, \tau)) = \frac{1}{\tau},$$

donde  $\mu$  es la medida de Patterson.

Sea  $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ . Supongamos además que existe  $\rho \in (0, 1)$  y  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_1$ , si  $1/x_1, 1/x_2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ , entonces  $F(x_1) \sim F(x_2)$ .

**Teorema 9'.** *Sean  $\eta$  y  $\eta'$  dos puntos fijos hiperbólicos conjugados. Para casi todo  $\xi \in \Lambda(G)$  con respecto a  $\mu$ , existen infinitos  $g \in G$  que verifican*

$$\|\xi - g(\eta)\| < c(\xi) F\left(\frac{1}{R_g}\right) R_g, \quad , R_g \leq 1.$$

donde  $R_g = \|g(\eta') - g(\eta)\|/2$ , si y sólo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^{\delta(G)}}{x} dx = \infty.$$

#### 4.2. Demostración de los teoremas.

Veamos en primer lugar cómo se reducen las pruebas de los teoremas 8 y 9 a los resultados de aproximación por órbitas de puntos fijos hiperbólicos contenidos en los teoremas 8' y 9'.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8. Sean,  $\tilde{p}$  un levantamiento en  $\mathbb{H}^{d+1}$  del punto  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}$  una geodésica cerrada dirigida en  $\mathcal{M}$  y  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Entonces, la geodésica  $\gamma_{p,v(\xi)}$  satisface

$$(2.1) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v(\xi)}(t), \gamma'_{p,v(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{t} \geq \alpha,$$

donde  $\Omega(\mathcal{G}) = \{(\mathcal{G}(t), \mathcal{G}'(t))\}$ , si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y una sucesión  $\{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  de levantamientos de  $\mathcal{G}$  tales que

$$(2.2) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p},\xi}(t_i)), \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \leq e^{-(\alpha-\varepsilon)t_i},$$

con  $\Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i) = \{(\tilde{\mathcal{G}}_i(t), \tilde{\mathcal{G}}'_i(t))\}$ .

Si  $\gamma_{p,v(\xi)}$  no se "enrolla" en  $\mathcal{G}$ ,  $\xi$  no es el punto final de ningún levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  y existen subsucesiones  $\{t_{i_s}\}$ ,  $\{\tilde{\mathcal{G}}_{i_s}\}$  verificando (2.2) tales que

$$(2.3) \quad \tilde{\mathcal{G}}_{i_{s_1}} \neq \tilde{\mathcal{G}}_{i_{s_2}}, \quad \text{para todos } i_{s_1} \neq i_{s_2}.$$

Supondremos en lo que sigue que  $\xi$  no es el punto final de ningún levantamiento de  $\mathcal{G}$ . La idea de la demostración es comprobar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (A) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$ , y una sucesión  $\{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  con  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1} \neq \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$ , para todos  $i_1 \neq i_2$ , verificando (2.2).
- (B) Existe  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$  se verifica

$$\|\xi - \eta_i^+\| \leq C R_i^{(1+\alpha)/(1-\alpha)-\varepsilon} \quad \text{y} \quad R_i \searrow 0,$$

con  $2R_i = \|\eta_i^+ - \eta_i^-\|$ , para infinitos pares ordenados de puntos fijos hiperbólicos conjugados  $(\eta_i^-, \eta_i^+)$  correspondientes a los puntos inicial y final de algún levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$ .



Obsérvese que si  $\xi$  verifica (B), entonces  $\xi \in \Lambda(G)$ .

El conjunto de los puntos finales de los levantamientos de  $\mathcal{G}$  es numerable. Por lo tanto, por esta equivalencia y por (2.2), es claro que el conjunto del Teorema 8 tiene la misma dimensión de Hausdorff y la misma  $\mu$ -dimensión que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} L' \left( n\mathcal{B}, \Xi, \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{k} \right),$$

con  $\mathcal{B}$  una bola en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Xi = \{\eta_\ell^+\}_{\ell \in \mathcal{L}}$ , donde  $\eta_\ell^+$  es el punto final de algún levantamiento de  $\mathcal{G}_\ell$  y  $L'(n\mathcal{B}, \Xi, (1+\alpha)/(1-\alpha) - 1/k)$  el conjunto de puntos  $\xi \in n\mathcal{B} \cap \Lambda(G)$  tales que, para todo  $\eta \in \Xi$ , se verifica, para infinitos  $g \in G$ , que

$$\|\xi - g(\eta)\| < C(\xi) R_g^{(1+\alpha)/(1-\alpha) - 1/k} \quad \text{y} \quad R_g \leq 1,$$

con  $2R_g = \|g(\eta') - g(\eta)\|$  y  $\eta'$  punto fijo hiperbólico conjugado de  $\eta$ .

Entonces

$$DH(L'(n\mathcal{B}, \Xi, \frac{1+\alpha}{1-\alpha})) \leq DH(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH(L'(n\mathcal{B}, \Xi, \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{k})),$$

$$DH_\mu(L'(n\mathcal{B}, \Xi, \frac{1+\alpha}{1-\alpha})) \leq DH_\mu(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} DH_\mu(L'(n\mathcal{B}, \Xi, \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{k})),$$

y el teorema 8 se sigue del teorema 8'.  $\blacksquare$

DEMOSTRACIÓN DE (A)  $\implies$  (B): Supongamos que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}$  es una geodésica vertical con punto final  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ . Sea  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i)$  tal que

$$d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p}, \xi}(t_i), (\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i), \tilde{\mathcal{G}}'_i(t'_i))) \leq e^{-(\alpha-\epsilon)t_i}.$$

Sin pérdida de generalidad suponemos también que  $\eta_i^- = (2R_i, 0, \dots, 0)$  y  $\eta_i^+ = (0, \dots, 0)$ . Definimos

$$h_i = \pi_{d+1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i)), \quad r_i = \|\xi - \eta_i^+\| = \|\xi\|.$$

y  $\theta_i$  es el menor ángulo entre  $\tilde{\mathcal{G}}'_i(t_i)$  y  $(0, 0, \dots, 1)$  en  $\partial\mathbb{B}^{d+1}$ .



y, por (2.4), se obtiene que

$$(2.5) \quad \tilde{r}_i = \|x_i - \xi\| \leq C h_i^{1+\alpha-\varepsilon} \quad \text{y} \quad s_i \sim h_i.$$

Es fácil ver que

$$r_i \leq \tilde{r}_i + x_i \leq \tilde{r}_i + s_i \tan \theta_i,$$

y, por (2.3.2) y (2.5), se concluye que

$$r_i \leq C h_i^{1+\alpha-\varepsilon}.$$

Por otra parte,

$$R = \frac{s_i}{\sin \theta_i}$$

y, por (2.3.2) y (2.5), se obtiene que  $R \geq C h_i^{1-\alpha+\varepsilon}$ . Por lo tanto,

$$r_i \leq C(\tilde{\mathcal{G}}) R_i^{(1+\alpha-\varepsilon)/(1-\alpha+\varepsilon)}.$$

En general, para  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t)$  distinto de una geodésica vertical, también se obtiene que

$$(2.6) \quad r_i \leq C(\tilde{\mathcal{G}}, \xi) R_i^{(1+\alpha-\varepsilon)/(1-\alpha+\varepsilon)}.$$

Recordemos que  $r_i = \|\xi - \eta_i^+\|$  y  $2R_i = \|\eta_i^+ - \eta_i^-\|$ . Además, como  $G$  es discreto, existe  $s > 0$  tal que  $C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, s) \cap C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_2}, s)$  para todos  $i_1 \neq i_2$ , donde  $C(\tilde{\mathcal{G}}, s) = \{x \in \mathbb{H}^{d+1} : \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, \tilde{\mathcal{G}}) \leq s\}$ . De esto se sigue que (2.6) se satisface para una sucesión  $\{(\eta_{i_s}^-, \eta_{i_s}^+)\}$  con  $R_{i_s} \searrow 0$ . ■

DEMOSTRACIÓN DE (B)  $\implies$  (A): Sea  $\xi \in \mathbb{R}^d$  verificando (B). Para  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  el levantamiento de  $\mathcal{G}$  con puntos inicial y final  $\eta_i^-$  y  $\eta_i^+$  respectivamente, encontraremos un tiempo  $t_i$  tal que

$$(2.7) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p},\xi}(t_i)), \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \leq e^{-(\alpha-\varepsilon')t_i}.$$

Para ello definiremos  $t_i$  de tal forma que

$$(2.8) \quad e^{-t_i} \sim \sqrt{r_i R_i},$$

$$(2.9) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p},\xi}(t_i)), \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \leq C \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{1/2}.$$

Por (2.8) y (2.9) es claro que si

$$\frac{r_i}{R_i} \leq C(\alpha, \varepsilon') (R_i r_i)^{\alpha-\varepsilon'},$$

o equivalentemente, si

$$r_i \leq C(\alpha, \varepsilon') R_i^{(1+\alpha-\varepsilon')/(1-\alpha+\varepsilon')},$$

entonces se verifica (2.7). Pero, por la condición (B), se tiene que

$$r_i \leq C R_i^{(1+\alpha)/(1-\alpha)-\varepsilon}$$

y, para  $R_i$  suficientemente pequeño, y

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon > \frac{1+\alpha-\varepsilon'}{1-\alpha+\varepsilon'},$$

se obtiene

$$C R_i^{(1+\alpha)/(1-\alpha)-\varepsilon} \leq C(\alpha, \varepsilon') R_i^{(1+\alpha-\varepsilon')/(1-\alpha+\varepsilon')}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}$  es una geodésica vertical con punto final  $\xi$ . Estudiemos primero el caso en que  $\xi, \eta_i^-$  y  $\eta_i^+$  son colineales.

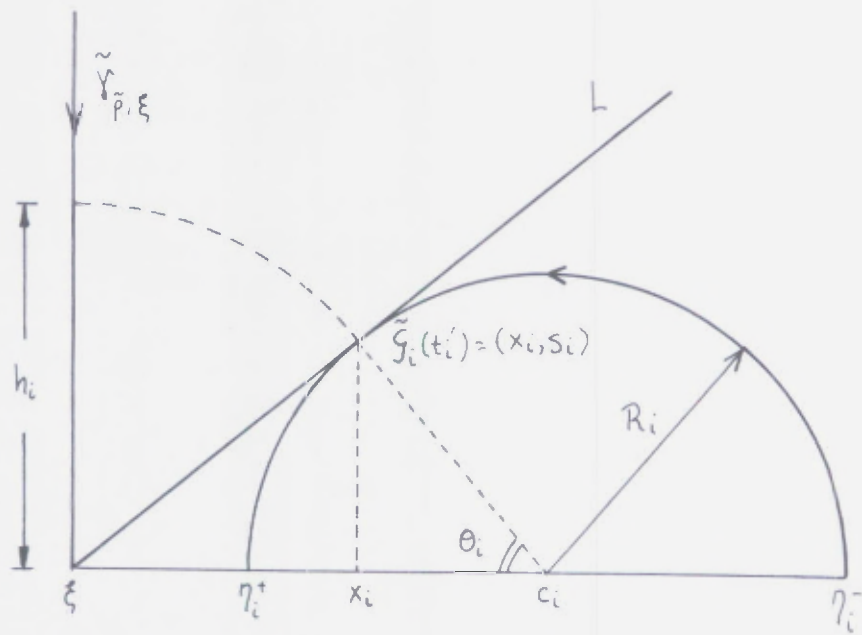


Figura 7



Si  $\xi$  no pertenece al segmento que une  $\eta_i^+$  y  $\eta_i^-$ , construyamos la geodésica vertical  $L$  que pasa por  $\xi$  y es tangente a  $\tilde{\mathcal{G}}_i$ . Denotaremos por  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i) = (x_i, s_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$  el punto de tangencia.

Si  $\xi$  pertenece al segmento que une  $\eta_i^+$  y  $\eta_i^-$ , denotaremos por  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i)$  el punto de corte entre  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  y la línea vertical con punto base  $\xi$ .

Sea  $h_i = \|\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i) - \xi\|$ . Definimos  $t_i$  tal que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i) = (\xi, h_i)$ , es decir,  $t_i = \log(s_{\tilde{p}}/h_i)$ , donde  $\tilde{p} = (\xi, s_{\tilde{p}})$ .

Si  $\xi \in [\eta_i^-, \eta_i^+]$ , entonces

$$h_i^2 = R_i^2 - (R_i - r_i)^2 = 2R_i r_i - r_i^2.$$

Si  $\xi \notin [\eta_i^-, \eta_i^+]$ , entonces

$$h_i^2 = (R_i + r_i)^2 - R_i^2 = 2R_i r_i + r_i^2.$$

Por lo tanto, en cualquier caso,  $h_i \sim \sqrt{R_i r_i}$ , y en consecuencia  $e^{-t_i} \sim \sqrt{R_i r_i}$ .

Comprobemos ahora (2.9). Sea  $d_i = \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i), \tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i))$ . Es fácil ver que el ángulo entre  $\tilde{\mathcal{G}}_i'(t'_i)$  y  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}'(t_i)$  es igual a  $\theta_i$ .

Si  $\xi \in [\eta_i^-, \eta_i^+]$ , entonces  $d_i = 0$ , y

$$2 \operatorname{sen} \frac{\theta_i}{2} = \sqrt{2} (1 - \cos \theta_i)^{1/2} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{R_i - r_i}{R_i}\right)^{1/2} = \sqrt{2} \left(\frac{r_i}{R_i}\right)^{1/2},$$

y, por consiguiente, se satisface (2.9).

Si  $\xi \notin [\eta_i^-, \eta_i^+]$ , entonces

$$\cosh d_i = \frac{1}{\cos \theta_i} = \frac{\|\xi - r_i\|}{R_i} = \frac{r_i + R_i}{R_i} = 1 + \frac{r_i}{R_i},$$

y se obtiene que

$$(2.10) \quad d_i^2 \sim \cosh d_i - 1 = \frac{r_i}{R_i}.$$

Además,

$$(2.11) \quad \begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \frac{\theta_i}{2} &= \sqrt{2} (1 - \cos \theta_i)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{R_i}{r_i + R_i}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{r_i}{r_i + R_i}\right)^{1/2} \leq C \left(\frac{r_i}{R_i}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por (2.10) y (2.11) se obtiene (2.9), también en este caso.

Pasemos ahora a estudiar el caso en que  $\xi, \eta_i^-$  y  $\eta_i^+$  no son colineales.

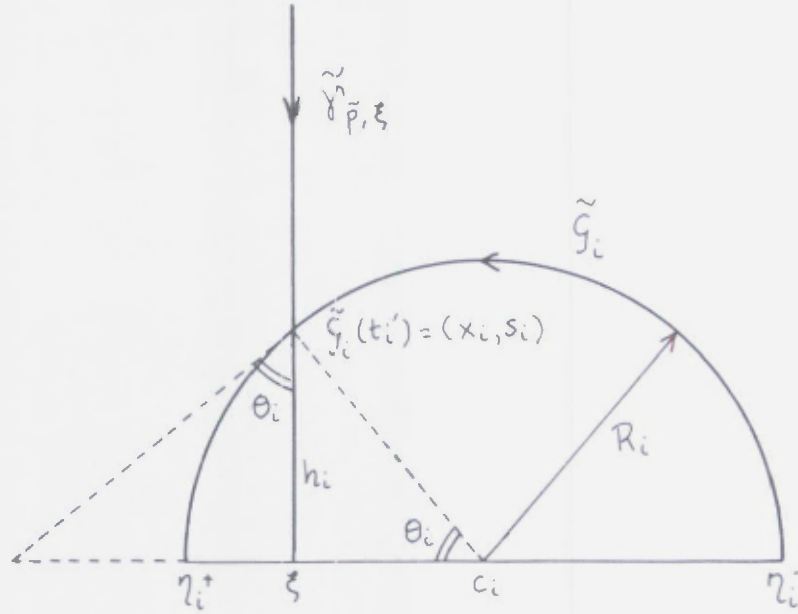


Figura 8

Sea  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i) = (x_i, s_i)$  el punto de  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  que verifica que  $\|x_i - \eta_i^+\| = r_i$ . Definimos  $\omega = (\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i), (0, 0, \dots, 0, -1)) \in \Omega(\mathbb{H}^{d+1})$ . Por el estudio hecho para puntos colineales es claro que

$$(2.12) \quad s_i \sim \sqrt{R_i r_i},$$

$$(2.13) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}(\omega, \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \leq C \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{1/2}.$$

Consideremos el triángulo de vértices  $x_i, \xi$  y  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i)$  y sea  $\theta_i$  el ángulo en el vértice  $\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i)$  (ver figura 9).

Sea  $h_i = \|\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i) - \xi\|$ . Definimos  $t_i$  tal que  $\tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i) = (\xi, h_i)$ , es decir,  $t_i = \log(s_{\tilde{p}}/h_i)$ .

Por construcción,  $h_i^2 = s_i^2 + \|x_i - \xi\|^2$ , y como

$$\|x_i - \xi\| \leq \|x_i - \eta_i^+\| + \|\eta_i^+ - \xi\| = 2r_i,$$

se obtiene, por (2.12), que  $h_i \sim \sqrt{R_i r_i}$ , y, por consiguiente, que  $e^{-t_i} \sim \sqrt{R_i r_i}$ .

Por otra parte, si

$$d_i = \rho_{d+1}(\tilde{\mathcal{G}}_i(t'_i), \tilde{\gamma}_{\tilde{p}, \xi}(t_i)),$$

entonces,

$$d_i \sim \sinh d_i = \tan \theta_i = \frac{\|x_i - \xi\|}{s_i} \leq \frac{2r_i}{s_i},$$

y, por (2.12), se obtiene que

$$d_i \leq C \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{1/2}.$$

En consecuencia,

$$(2.14) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p},\xi}(t_i)), \omega) = d_i \leq C \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{1/2}.$$

Finalmente, (2.9) se sigue de (2.13) y (2.14). ■

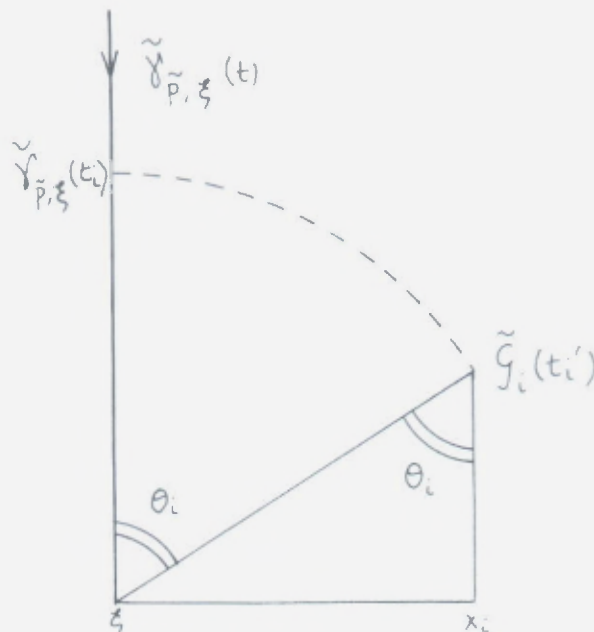


Figura 9

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9. Sea  $\tilde{p}$  un levantamiento en  $\mathbb{H}^{d+1}$  del punto  $p \in \mathcal{M}$ , y sea  $\mathcal{G}$  una geodésica cerrada dirigida en  $\mathcal{M}$ . Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , la geodésica  $\gamma_{p,r(\xi)}$  satisface

$$(2.15) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,r(\xi)}(t), \gamma'_{p,r(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \geq \frac{1}{2\delta(\mathcal{G})}$$

si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$  y una sucesión  $\{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  de levantamientos de  $\mathcal{G}$  tales que

$$(2.16) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{\tilde{p},\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{\tilde{p},\xi}(t_i)), \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \leq \frac{1}{t_i^{1/(2\delta) - \varepsilon}}.$$

Si  $\xi$  no es el punto final de algún levantamiento de  $\mathcal{G}$ , es decir, si  $\gamma_{p,\xi}$  no se “enrolla” en  $\mathcal{G}$ , entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todas  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, \tilde{\mathcal{G}}_{i_2} \in \{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  con  $i_1 \neq i_2$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1} \neq \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$ .

El conjunto de los puntos finales de los levantamientos de  $\mathcal{G}$  es numerable y, por consiguiente, podemos suponer que  $\xi$  no es el punto final de ningún levantamiento de  $\mathcal{G}$ . Con un razonamiento similar al utilizado para ver la equivalencia entre (A) y (B) en la demostración del teorema 8, se puede ver que las siguientes condiciones también son equivalentes:

- (A') Para todo  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión  $\{t_i\}$  con  $t_i \nearrow \infty$ , y una sucesión  $\{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  con  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1} \neq \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$  para todos  $i_1 \neq i_2$ , verificando (2.16).  
 (B') Existe  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , se verifica que

$$\|\xi - \eta_i^+\| \leq C R_i \left( \frac{1}{\log \frac{1}{R_i}} \right)^{1/(2\delta) - \varepsilon}, \quad R_i \searrow 0,$$

con  $2R_i = \|\eta_i^+ - \eta_i^-\|$  para infinitos pares ordenados  $(\eta_i^-, \eta_i^+)$  de puntos fijos hiperbólicos correspondientes a los puntos inicial y final de algún levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$ .

Si  $\xi$  verifica (B), es claro que  $\xi \in \Lambda(G)$ . Por lo tanto, el conjunto de  $\xi \in \mathbb{R}^d$  que verifica (2.15) está contenido en  $\Lambda(G)$ .

Para todo  $\sigma > 0$  definimos

$$F_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [1, e), \\ \frac{1}{(\log x)^{1/\delta}}, & \text{si } x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Estas funciones satisfacen las condiciones del Teorema 9'. Además

$$\int_1^\infty \frac{(F_\sigma(x))^\delta}{x} dx = \begin{cases} \infty, & \text{si } \sigma \geq \delta, \\ \frac{\sigma}{\delta - \sigma}, & \text{si } 0 < \sigma < \delta. \end{cases}$$

De la equivalencia entre (A') y (B') se sigue que

$$\bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,r(\xi)}(t), \gamma'_{p,r(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \geq \frac{1}{2\delta(G)} \right\},$$

donde  $A(F_\sigma, C)$  es el conjunto de puntos  $\xi \in \Lambda(G)$  tales que

$$\|\xi - g(\eta)\| < C F_\sigma\left(\frac{1}{R_g}\right) R_g \quad \text{y} \quad R_g \leq 1,$$

se verifica para infinitos  $g$ , donde  $\eta$  es el punto final de un levantamiento de  $\mathcal{G}$  y de nuevo  $2R_g = \|g(\eta) - g(\eta')\|$ , con  $\eta'$  el conjugado  $\eta$ .



Por (2.17) el teorema 9' nos dice que el conjunto  $\cup_{C>0} A(F_\sigma, C)$  tiene  $\mu$ -medida plena. Por lo tanto, para casi todo  $\xi \in \Lambda(G)$  con respecto a  $\mu$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v(\xi)}(t), \gamma'_{p,v(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \geq \frac{1}{2\delta(G)}.$$

Por otra parte, la geodésica  $\gamma_{p,v(\xi)}$  satisface

$$(2.18) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v(\xi)}(t), \gamma'_{p,v(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \geq \frac{1}{2\delta(G)},$$

si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $T_0$  tal que, para todo  $t \geq T_0$  y para todo levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$ ,

$$(2.19) \quad d_{\Omega(\mathbb{H}^{d+1})}((\tilde{\gamma}_{p,\xi}(t_i), \tilde{\gamma}'_{p,\xi}(t_i)), \Omega(\tilde{\mathcal{G}}_i)) \geq \frac{1}{t_i^{1/(2\delta)-\varepsilon}}.$$

De nuevo con el mismo tipo de argumentos utilizados para ver la equivalencia entre (A) y (B) del teorema 8, se obtiene que (2.19) es equivalente a que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista  $0 < R_\varepsilon \leq 1$  tal que, para todo  $R_i \leq R_\varepsilon$ , con  $2R_i = \|\eta_i^+ - \eta_i^-\|$ , donde  $\eta_i^-$  y  $\eta_i^+$  corresponden respectivamente a los puntos inicial y final de algún levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$ , se verifique que

$$(2.20) \quad \|\xi - \eta_i^+\| \geq C R_i \left( \frac{1}{\log \frac{1}{R_i}} \right)^{1/(2\delta)-\varepsilon}.$$

con  $C > 0$ . Obsérvese que si  $\xi$  verifica (2.20), entonces  $\xi \notin \Lambda(G)$ .

De esta equivalencia es claro que

$$\bigcup_{C>0} A(F_\sigma, C)^c \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v(\xi)}(t), \gamma'_{p,v(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \geq \frac{1}{2\delta(G)} \right\},$$

donde  $A(F_\sigma, C)^c$  es el conjunto de puntos  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tales que

$$\|\xi - g(\eta)\| < C F_\sigma \left( \frac{1}{R_g} \right) R_g \quad \text{y} \quad R_g \leq 1,$$

se verifica para sólo un número finito de  $g \in G$ .

De (2.17) y el teorema 9' se tiene que el conjunto  $\cup_{C>0} A(F_\sigma, C)^c$  tiene  $\mu$ -medida plena para  $0 < \sigma < \delta$ . Además, si  $\sigma_1 < \sigma_2$ ,

$$\bigcup_{C>0} A(F_{\sigma_2}, C) \cup \bigcup_{C>0} A(F_{\sigma_1}, C),$$

y, por consiguiente,

$$\bigcap_{0 < \sigma < \delta} \bigcup_{C > 0} A(F_\sigma, C)^c$$

tiene  $\mu$ -medida plena.

Por lo tanto, para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$  con respecto a  $\mu$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v(\xi)}(t), \gamma'_{p,v(\xi)}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} \leq \frac{1}{2\delta(G)}. \quad \blacksquare$$

**DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 8' Y 9'.** Para demostrar estos teoremas utilizaremos los teoremas 2 y 3 (capítulo 2) de aproximación para sistemas bien distribuidos. El primer paso es ver que existe  $c > 0$  tal que, para toda geodésica cerrada dirigida  $\mathcal{G}$ , el conjunto

$$\mathcal{W}_{\mathcal{G},c} = \{B(\eta_i^+, cR_i) : cR_i \leq 1\},$$

donde  $2R_i = \|\eta_i^+ - \eta_i^-\|$  y  $\eta_i^-$  y  $\eta_i^+$  son los puntos inicial y final de algún levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$ , es un sistema bien distribuido con la medida de Patterson.

Necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 8.** *Existe  $\rho \in (0, 1)$  que depende de  $\mathcal{G}$  tal que para toda bola  $B$  en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda(G)$ , el conjunto  $T_n(B, \mathcal{G})$  de levantamientos  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  de  $\mathcal{G}$  con punto final  $\eta_i^+$  en  $B$  y radio  $R_i \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$  satisface, para todo  $n \geq n_0(B, \mathcal{G}, G)$ ,*

$$\#T_n(B, \mathcal{G}) \sim \left(\frac{1}{\rho^n}\right)^\delta \mu(B),$$

donde  $\delta$  es el exponente de convergencia de  $G$ .

Recordemos una estimación de la medida de Patterson (ver capítulo 1, sección 1.6).

**Teorema ST** ([S3], [T2]). *Si  $G$  es convexo co-compacto,*

$$\mu(B(\xi, r)) \sim r^\delta, \quad \text{para todo } \xi \in \Lambda(G).$$

Como  $G$  es discreto, es claro que existe  $s > 0$  tal que, para todo par de levantamientos  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$  de  $\mathcal{G}$ ,

$$C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}) \cap C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_2}) = \emptyset,$$

donde

$$C(\tilde{\mathcal{G}}) = \{x \in \mathbb{H}^{d+1} : \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, \tilde{\mathcal{G}}) \leq s\}.$$

Fijamos ahora  $c_0 = c(s, \rho) > 0$  tal que, para todo par de levantamientos  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$  de  $\mathcal{G}$ , con radios en el intervalo  $[\rho^{n+1}, \rho^n)$ , se verifique

$$(2.21) \quad B(\eta_{i_1}^+, c(s, \rho)R_{i_1}) \cap B(\eta_{i_2}^+, c(s, \rho)R_{i_2}) = \emptyset.$$

**Lema 9.**  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G}, c_0}, \mu)$  es un sistema bien distribuido con parámetro  $(\delta, 0, \rho)$ , donde  $\rho$  es el número que aparece en el lema 8.

**DEMOSTRACIÓN.** Por el lema 8, es claro que  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G}, c_0}, \mu)$  cumple la propiedad (1.4.i) de equidistribución. La propiedad (1.4.ii) se sigue de (2.21). El resto de las propiedades es fácil de comprobar usando el teorema ST. ■

El lema 9 y el teorema ST nos garantizan que las condiciones del teorema 2 (capítulo 2) se verifican con  $\alpha = \alpha'(\tau) = \delta$  y  $\beta = \beta'(\tau) = 0$ . El teorema 8' se sigue del teorema 2.

Por otra parte por el lema 9 y el teorema 3 (capítulo 2), es claro que para todo  $C > 0$  el conjunto  $A(F, C)$  de puntos  $\xi \in \Lambda(G)$  que verifican para infinitas  $g \in G$

$$\|\xi - g(\eta)\| \leq C F\left(\frac{1}{R_g}\right) R_g, \quad R_g \leq 1,$$

donde  $\eta$  es un punto fijo hiperbólico y  $R_g = \|g(\eta') - g(\eta)\|/2$  con  $\eta'$  el conjugado de  $\eta$ , tiene  $\mu$ -medida positiva si y sólo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^\delta}{x} dx = \infty.$$

Pero  $A = \cup_{C>0} A(F, C)$  es un conjunto  $G$ -invariante, y la acción de  $G$  es ergódica en  $\Lambda(G)$ . Por lo tanto el conjunto  $A$  tiene  $\mu$ -medida plena o tiene  $\mu$ -medida nula. Esto demuestra el teorema 9'. ■

Así pues, sólo nos resta por demostrar el lema 8.

**DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 8.** La demostración de este lema sigue exactamente la misma línea de ideas que la demostración del lema 4 del capítulo anterior. Por ello nos limitaremos a dar los lemas (equivalentes al teorema de Nicholls y el lema 5) necesarios en la prueba.

El primero de ellos es una versión local de un resultado sobre la distribución de las órbitas por un grupo convexo co-compacto de isometrías hiperbólicas de la bola unidad  $\mathbb{B}^{d+1}$ . El resultado global se encuentra en [N2, Teorema 4.6.5]. Usando la definición dada para  $N(r, \eta, \xi, w)$  en el capítulo 2 con  $\xi \in \Lambda(G)$ , nos dice que

**Lema 10.** Existe  $r_0 > 0$  que depende de  $\eta$  tal que

$$N(r, \eta, \xi, w) \sim e^{r^\delta} w^\delta, \quad \text{para todo } r \geq r_0.$$

Este resultado se obtiene fácilmente usando el teorema 4.3.2 en [N2] en la demostración del resultado global ([N2, teorema 4.6.5]).

**Lema 11.** Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $M\ddot{o}b(\mathbb{H}^{d+1})$  y  $\mathcal{G}$  una geodésica en  $\mathbb{H}^{d+1}$ . Consideremos la siguiente suma, con  $p_0, q_0 \in \mathbb{H}^{d+1}$  y  $\sigma > 0$ ,

$$S = \sum_{g \in G} e^{-\sigma \rho(p_0, g(q_0))},$$

donde  $\rho = \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}$ .

Si  $p_0 \notin \mathcal{G}$ , entonces existe una constante  $C_1 = C_1(q_0, G)$  tal que

$$S \leq C_1 e^{-\sigma \rho(p_0, \mathcal{G})}.$$

De hecho,  $C_1$  depende sólo de

$$L = \min\{\rho(q_0, g(q_0)) : g \in G \setminus \{\text{identidad}\}\}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos suponer, por conjugación, que  $\mathcal{G}$  es una geodésica vertical con punto final cero y  $\|p_0\| = 1$ . Por otra parte, existe una constante absoluta  $C > 0$  tal que si  $Q \in \mathcal{G}$ , entonces

$$\rho(p_0, Q) \geq \rho(e_{d+1}, Q) + \rho(e_{d+1}, p_0) - C,$$

con  $e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$ . En consecuencia,

$$e^{-\sigma \rho(p_0, \mathcal{G})} \leq C e^{-\sigma \rho(p_0, \mathcal{G})} e^{-\sigma \rho(e_{d+1}, Q)}.$$

Por lo tanto, es suficiente probar que

$$S_1 := \sum_{\substack{g \in G \\ g(q_0) \in \mathcal{G}}} e^{-\sigma \rho(e_{d+1}, g(q_0))} \leq C(q_0, G).$$

Ahora, sea  $\Omega_k$  el conjunto

$$\Omega_k = \{Q \in \mathcal{G} : \rho(Q, e_{d+1}) \in [k, k+1)\} \quad (k \geq 0).$$

Como la longitud hiperbólica de  $\Omega_k$  es igual a 2 para todo  $k$  y  $G$  es discreto, se tiene que

$$\#\{g \in G : g(q_0) \in \Omega_k\} \leq N_0 = N_0(L) < \infty.$$

Pero si  $Q \in \Omega_k$ , entonces  $\rho(e_{d+1}, Q) \geq k$ . Por lo tanto,

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{g \in G \\ g(q_0) \in \Omega_k}} e^{-\sigma \rho(e_{d+1}, g(q_0))} \leq N_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma k} = C,$$

y se obtiene el resultado. ■



## Capítulo 5

### Excursiones geodésicas en variedades hiperbólicas geométricamente finitas

#### 5.1. Introducción.

En este capítulo completamos el estudio del capítulo anterior, a cuya introducción referimos.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad hiperbólica  $(d+1)$ -dimensional geométricamente finita y no compacta.

Entonces  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  donde  $G$  es un subgrupo geométricamente finito de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  y  $\mathcal{M}_G = H(\Lambda(G))/G = X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell$  donde  $H(\Lambda(G))$  es la envolvente convexa del conjunto límite de  $G$ ,  $X_0$  es compacta y las  $Y_\ell$ 's son cúspides. En el caso de superficies ( $d=1$ ) se tiene que  $\mathcal{M} \cong X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell \cup \bigcup_{s=1}^n Z_s$  donde los  $Z_s$  son foniles. (Ver capítulo 1, secciones 1.1, 1.2).

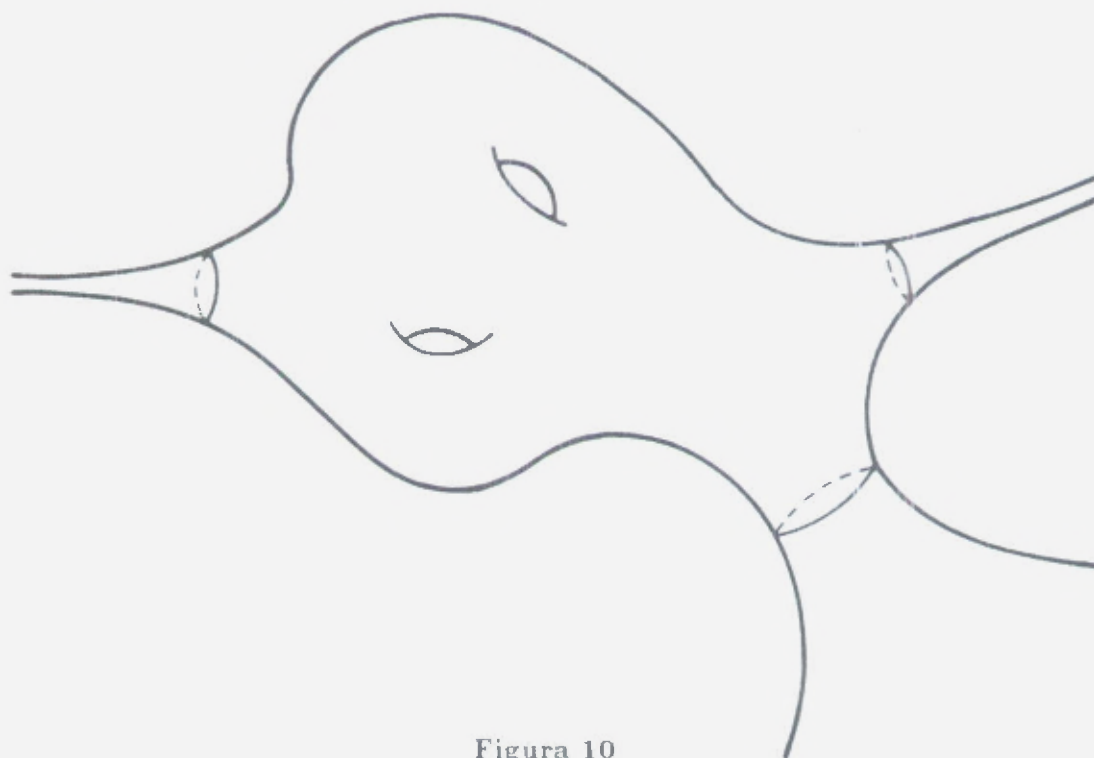


Figura 10

De nuevo nos interesa estudiar las geodésicas que entran infinitas veces a una cúspide o se acercan infinitas veces a una geodésica simple cerrada dirigida  $G$  a una cierta velocidad.

Es decir, queremos obtener resultados similares a los obtenidos en los capítulos 3 y 4 pero ahora en este nuevo contexto. La dificultad aumenta considerablemente debido a que ahora no necesariamente todas las cúspides son maximales (cosa que ocurría para  $\mathcal{M}$  de volumen finito). Además en el caso general la medida de Patterson asociada a  $G$  tiene un comportamiento mucho más complicado. Por esto no obtenemos resultados tan precisos como en los capítulos anteriores.

Denotaremos por  $\delta$  el exponente de convergencia de  $G$  y por  $\mu$  la medida en  $S(p)$  inducida por la medida de Patterson.

Sean  $p, q$  puntos de  $\mathcal{M}$  y sea  $\mathcal{Y} = \{Y_\ell\}$  un conjunto de cúspides de  $\mathcal{M}$ . Denotamos por  $k(\ell)$  el rango de la cúspide  $Y_\ell$  y por  $K$  el mayor de los rangos de las cúspides de  $\mathcal{M}$ .

Obtenemos el siguiente resultado sobre el conjunto de geodésicas que entran infinitas veces en cada una de las cúspides de  $\mathcal{Y}$ .

**Teorema 10.** *Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , sea  $L(\mathcal{Y}, \alpha)$  el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que para todo  $Y_\ell \in \mathcal{Y}$*

$$\limsup_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in T(Y_\ell, v)}} \frac{\text{dist}(\gamma_{p,v}(t), q)}{t} \geq \alpha,$$

donde  $T(Y_\ell, v) = \{t : \gamma_{p,v}(t) \in Y_\ell\}$ .

Entonces,

$$w_1(\alpha) \leq DH(L(\mathcal{Y}, \alpha)) \leq \delta(1 - \alpha),$$

$$\frac{1}{DH_\mu(L(\mathcal{Y}, \alpha))} - 1 = \left(2 - \frac{k}{\delta}\right) \left(\frac{1}{1 - \alpha} - 1\right),$$

donde  $k = \min\{k(\ell) : Y_\ell \in \mathcal{Y}\}$ , y

$$w_1(\alpha) = \begin{cases} \delta(1 - \alpha) - (\delta - k)\alpha, & \text{si } k < \delta, \\ \min\{2\delta - K, \delta(1 - \alpha) - (K - k)\alpha\}, & \text{si } k \geq \delta. \end{cases}$$

También obtenemos el siguiente resultado de tipo Khintchine.

**Teorema 11.** *Para casi toda dirección  $v \in S(p)$  con respecto a  $\mu$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\gamma_{p,v}(t), q)}{\log t} = \frac{1}{2\delta - K}.$$

De manera similar, si  $\mathcal{V} = \{\mathcal{G}_s(t)\}$  es una colección finita de geodésicas cerradas dirigidas en  $\mathcal{M}$  y si  $\Omega(\mathcal{G}_s) = (\mathcal{G}_s(t), \mathcal{G}'_s(t))$  se tiene,

**Teorema 12.** *Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , sea  $L(\mathcal{V}, \alpha)$  el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que, para todo  $\mathcal{G}_t \in \mathcal{V}$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(\mathcal{M})}((\gamma_{p,v}(t), \gamma'_{p,v}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{t} \geq \alpha.$$

Entonces,

$$\min \left\{ 2\delta - K, \delta \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\} \leq DH(L(\mathcal{V}, \alpha)) \leq \delta \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

y

$$DH_{\mu}(L(\mathcal{V}, \alpha)) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

**Teorema 13.** *Sea  $\mathcal{G}(t)$  una geodésica cerrada dirigida en  $\mathcal{M}$ . Para casi toda dirección  $v \in S(p)$  con respecto a  $\mu$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{d_{\Omega(M)}((\gamma_{p,v}(t), \gamma'_{p,v}(t)), \Omega(\mathcal{G}))}}{\log t} = \frac{1}{\delta}.$$

Enunciamos ahora los correspondientes resultados para  $G$  un subgrupo geoméricamente finito de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . La medida  $\mu$  es ahora la medida de Patterson.

Sea  $P = \{p\}$  una colección finita de puntos fijos parabólicos. Denotemos por  $k(p)$  el rango de la cúspide en  $p$  y por  $K$  el máximo de los rangos de las cúspides de  $G$ .

**Teorema 10'.** *Dados  $\tau > 1$  y una bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$  con centro en el conjunto límite  $\Lambda(G)$ , sea  $L'(\mathcal{B}, P, \tau)$  el conjunto de puntos  $\xi \in \mathcal{B} \cap \Lambda(G)$  tales que, para todo  $p \in P$ , se verifica*

$$\|\xi - g(p)\| < c(\xi) R_{g(p)}^{\tau} \quad \text{y} \quad R_{g(p)} \leq 1,$$

para infinitos  $g \in G$ . Aquí  $R_{g(p)}$  denota el radio de la horobola asociada a la cúspide en  $p$  con punto base  $g(p)$ .

Entonces,

$$w_1(\tau) \leq DH(L'(\mathcal{B}, P, \alpha)) \leq \frac{\delta}{\tau}$$

y

$$\frac{1}{DH_{\mu}(L'(\mathcal{B}, P, \alpha))} - 1 = \left(2 - \frac{k}{\delta}\right)(\tau - 1),$$

donde  $k = \min\{k(p) : p \in P\}$ , y

$$w_1(\tau) = \begin{cases} \frac{\delta}{\tau} - (\delta - k) \left(1 - \frac{1}{\tau}\right), & \text{si } k < \delta, \\ \min \left\{ 2\delta - K, \frac{\delta}{\tau} - (K - k) \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \right\}, & \text{si } k \geq \delta. \end{cases}$$

Sea  $\Xi = \{\eta\}$  una colección finita de puntos fijos hiperbólicos no conjugados.

**Teorema 12'.** *Dados  $\tau > 1$  y una bola  $B$  en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda(G)$ , sea  $L'(B, \Xi, \tau)$  el conjunto de puntos  $\xi \in B \cap \Lambda(G)$  tales que, para todo  $\eta \in \Xi$ , se verifica*

$$\|\xi - g(\eta)\| < c(\xi) R_{g(\eta)}^\tau, \quad R_{g(\eta)} \geq 1,$$

para infinitos  $g \in G$ . Aquí  $R_{g(\eta)} = \|g(\eta') - g(\eta)\|/2$ , con  $\eta'$  el punto fijo hiperbólico conjugado a  $\eta$ .

Entonces,

$$\min \left\{ \frac{\delta}{\tau}, 2\delta - K \right\} \leq DH(L'(B, \Xi, \tau)) \leq \frac{\delta}{\tau}$$

y

$$DH_\mu(L'(B, \Xi, \tau)) = \frac{1}{\tau}.$$

Sea  $F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, positiva y decreciente tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ . Supongamos además que existen  $\rho \in (0, 1)$  y  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_1$ , si  $1/x_1, 1/x_2 \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ , entonces  $F(x_1) \sim F(x_2)$ .

**Teorema 11'.** *Sea  $p$  un punto fijo parabólico. Para casi todo  $\xi \in \Lambda(G)$  con respecto a  $\mu$ , existen infinitos  $g \in G$  que verifican  $R_{g(p)} \geq 1$ , y*

$$\|\xi - g(p)\| \leq c(\xi) F\left(\frac{1}{R_{g(p)}}\right) R_{g(p)},$$

donde  $R_{g(p)}$  es el radio de la horobola con punto base  $g(p)$  asociada a la cúspide en  $p$ , si y sólo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^\delta}{x} dx = \infty.$$

**Teorema 13'.** *Sean  $\eta$  y  $\eta'$  dos puntos fijos hiperbólicos conjugados. Para casi todo  $\xi \in \Lambda(G)$  con respecto a  $\mu$ , existen infinitos  $g \in G$  que verifican  $R_{g(\eta)} \geq 1$  y*

$$\|\xi - g(\eta)\| < c(\xi) F\left(\frac{1}{R_{g(\eta)}}\right) R_{g(\eta)}.$$



donde  $R_{g(\eta)} = \|g(\eta') - g(\eta)\|/2$ , si y solo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^\delta}{x} dx = \infty.$$

En particular, al considerar los grupos de Hecke  $\Gamma(\lambda)$  (ver capítulo 1, sección 1.7) se obtienen, a partir de los teoremas 10' y 11', los siguientes resultados:

**Corolario 4.** Para cada  $\tau > 1$ , sea  $A(\tau)$  el conjunto de puntos límites  $\xi \in \Lambda(\Gamma(\lambda))$  tales que se verifica

$$\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \frac{c(\xi)}{\beta^{2\tau}},$$

para infinitas  $\lambda$ -fracciones finitas  $\alpha/\beta$  con  $\text{m.c.d.}(\alpha, \beta) = 1$ .

Entonces,

$$\min \left\{ \frac{\delta}{\tau}, 2\delta - 1 \right\} \leq DH(A(\tau)) \leq \frac{\delta}{\tau}$$

y

$$DH_\mu(A(\tau)) = \frac{1}{\tau},$$

donde  $\delta = \delta(\Gamma(\lambda))$ .

**Corolario 5.** Para casi todo  $\xi \in \Lambda(\Gamma(\lambda))$  con respecto a  $\mu$ , existen infinitas  $\lambda$ -fracciones finitas  $\alpha/\beta$  con  $\text{m.c.d.}(\alpha, \beta) = 1$  que verifican

$$\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| < C F(\beta^2) \frac{1}{\beta^2}, \quad \text{para algún } C > 0,$$

si y solo si

$$\int_1^\infty \frac{(F(x))^{\delta(\Gamma(\lambda))}}{x} dx = \infty.$$

Recordemos que la función  $s \mapsto \delta(\Gamma(s))$  es continua, Lipschitz, estrictamente decreciente en  $[2, \infty)$  y satisface  $\delta(\Gamma(2)) = 1$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta(\Gamma(\lambda)) = 1/2$  (Ver e.g. [PS]).

## 5.2. Demostración de los teoremas.

Los resultados sobre geodésicas (teoremas 10, 11, 12 y 13) se reducen a los teoremas sobre aproximación en  $\mathbb{R}^d$  por órbitas de  $G$ , de forma similar a lo hecho en los capítulos anteriores. Por ello nos limitaremos a demostrar estos últimos.

Sea  $p$  un punto fijo parabólico y  $\{H(a_i, R_i)\}$  el conjunto de horobolas asociadas a la cúspide en  $p$ . Definimos

$$\mathcal{W}_p = \{B(a_i, R_i)\}.$$

Por otra parte, dados  $(\eta, \eta')$  un par de puntos fijos hiperbólicos conjugados denotamos por  $\mathcal{G}$  la proyección en  $\mathcal{M}$  de la geodésica en  $\mathbb{H}^{d+1}$  con punto inicial  $\eta'$  y punto final  $\eta$ .

Sea  $\{\tilde{\mathcal{G}}_i\}$  el conjunto de levantamientos en  $\mathbb{H}^{d+1}$  de  $\mathcal{G}$  y denotemos por  $(\eta_i, \eta'_i)$  los puntos inicial y final de  $\tilde{\mathcal{G}}_i$ .

Definimos  $R_i = \|\eta_i - \eta'_i\|/2$ , y

$$\mathcal{W}_{\mathcal{G},c} = \{B(\eta_i, cR_i) : cR_i \leq 1\}$$

Como en los capítulos anteriores, la idea de la demostración es ver que  $(\mathcal{W}_p, \mu)$  y  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G},c}, \mu)$  (para algún  $c > 0$ ) son sistemas bien distribuidos y utilizar los teoremas 2 y 3 de aproximación.

Recordemos el teorema ST que nos da estimaciones sobre la medida de Patterson. (Ver capítulo 1, sección 1.6).

**Teorema ST** ([S3],[T2]). *Sea  $\xi \in \Lambda(G)$ . Entonces*

$$\mu(I(\xi, r)) \sim r^{\delta(G)} \Phi((\xi, r))$$

donde  $\Phi((\xi, r)) \sim (R/r)^{k-\delta}$  si el punto  $(\xi, r) \in \mathbb{H}^{d+1}$  pertenece a una horobola de radio  $R$  asociada a una cúspide de rango  $k$ . En caso contrario  $\Phi((\xi, r)) \sim 1$ .

Una de las dificultades que se presentan es demostrar la propiedad de equidistribución para los sistemas  $(\mathcal{W}_p, \mu)$  y  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G},c}, \mu)$ .

Se obtienen los siguientes resultados para toda bola  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{R}^d$  con centro en  $\Lambda(G)$ .

**Lema 12** ([MV]). *Existe  $\rho_1 \in (0, 1/2)$  tal que el conjunto  $T_n(\mathcal{B}, p)$  de horobolas asociadas a la cúspide  $p$  con puntos base en  $\mathcal{B}$  y radio  $R \in [\rho_1^{n+1}, \rho_1^n]$  satisface, para todo  $n \geq n_0(\mathcal{B}, p, G)$ ,*

$$\#T_n(\mathcal{B}, p) \sim \left(\frac{1}{\rho_1^n}\right)^\delta \mu(\mathcal{B}).$$

**Lema 13.** *Existe  $\rho_2 \in (0, 1)$  tal que el conjunto  $T_n(\mathcal{B}, \mathcal{G})$  de levantamientos de  $\mathcal{G}$  con punto final en  $\mathcal{B}$  y radio  $R \in [\rho_2^{n+1}, \rho_2^n]$  satisface, para todo  $n \geq n_0(\mathcal{B}, \mathcal{G}, G)$ ,*

$$\#T_n(\mathcal{B}, \mathcal{G}, G) \sim \left(\frac{1}{\rho_2^n}\right)^\delta \mu(\mathcal{B}).$$

Cuando considerábamos grupos  $G$  de volumen finito y grupos  $G$  convexos compactos obteníamos resultados similares a estos dos lemas. Para su demostración utilizábamos resultados locales sobre distribución de órbitas. En el caso general en que  $G$  es geométricamente finito también existe un resultado global sobre distribución de órbitas debido a Patterson. Pero no es posible obtener el resultado

local utilizando argumentos similares a los usados en los casos de volumen finito y convexo-cocompacto. Esto se debe a que la medida de Patterson tiene una expresión mucho más complicada.

Sin embargo, de la demostración del lema 4 es claro que el lema 12 implica el siguiente resultado orbital local que es una generalización del teorema de Nicholls para volumen finito (página 60).

**Corolario 6.** *Sea  $G$  un subgrupo geoméricamente finito de  $Möb(\mathbb{B}^{d+1})$ . Existe  $r_0 > 0$ , que depende de  $\eta$ , tal que*

$$N(r, \eta, w) \sim e^{r\delta} w^\delta, \quad \text{para todo } r \geq r_0.$$

Usando que las horobolas son disjuntas y el lema 12, se obtiene la propiedad de equidistribución para  $(\mathcal{W}_p, \mu)$ . Similarmente, usando que  $\mathcal{G}$  tiene un entorno cuyos levantamientos son disjuntos y el lema 13, se obtiene que existe  $0 < c_0 < 1$  tal que  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G},c}, \mu)$  verifica la propiedad de equidistribución para todo  $0 < c \leq c_0$ .

Una vez que se ha demostrado la propiedad de equidistribución es fácil concluir, usando el teorema ST, lo siguiente:

- (i)  $(\mathcal{W}_p, \mu)$  es un sistema bien distribuido con parámetro  $(2\delta - k, k - \delta, \rho_1)$  donde  $k$  es el rango de la cúspide en  $p$ .
- (ii) Para cada  $0 < c \leq c_0$ ,  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G},c}, \mu)$  es un sistema bien distribuido con parámetro  $(\delta, 0, \rho_2)$ .

Los teoremas 11' y 13' se siguen, como en los capítulos anteriores, del teorema 3 y del hecho de que la acción de  $G$  es ergódica sobre  $\Lambda(G)$ .

Finalmente, para concluir los teoremas 10' y 12' es necesario verificar las condiciones del teorema 2.

Por el teorema ST es claro que para  $\alpha' = \delta - \beta'$  y  $\beta' = \max\{0, K - \delta\}$  se verifican las condiciones del teorema 2 para el sistema  $(\mathcal{W}_p, \mu)$ .

Por otra parte, el siguiente lema nos garantiza que para  $\alpha'(\tau) = \delta - \beta'(\tau)$  y  $\beta'(\tau) = \max\{0, \tau(K - \delta)\}$  se verifican las condiciones del teorema 2 para el sistema  $(\mathcal{W}_{\mathcal{G},c}, \mu)$ , con  $0 < c \leq \min\{c_0, c'_0\}$ .

**Lema 14.** *Existe  $c'_0 > 0$  tal que, si  $B(a, r) \subset B_i^\tau = B(a_i, (cR_i)^\tau)$  con  $a \in \Lambda(G)$  y  $B_i = B(a_i, cR_i) \in \mathcal{W}_{\mathcal{G},c}$  con  $0 < c \leq c'_0$ , entonces*

$$\mu(B(a, r)) \leq C r^{\alpha'(\tau)} R_i^{\beta'(\tau)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema ST si el rango máximo,  $K$ , de los rangos de las cúspides satisface  $K < \delta$ , ó  $(\xi, r)$  no pertenece a ninguna de las horobolas de las cúspides, se tiene que

$$\mu(B(\xi, r)) \leq c r^\delta.$$

En caso contrario, si  $(\xi, r)$  pertenece a una horobola  $H(a, R)$  correspondiente a alguna cúspide, entonces

$$\Phi((\xi, r)) \leq c \left(\frac{R}{r}\right)^{K-\delta}.$$

Para concluir la demostración veremos que si  $\xi \in B_i^r$ , entonces  $R \leq c R_i^r$ .

Sea  $s > 0$  tal que, para todo levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, \tilde{\mathcal{G}}_{i_2}$  de  $\mathcal{G}$  con  $i_1 \neq i_2$ , se verifique

$$C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}, s) \cap C(\tilde{\mathcal{G}}_{i_2}, s) = \emptyset,$$

donde  $C(\tilde{\mathcal{G}}, s) = \{x \in \mathbb{H}^{d+1} : \rho_{\mathbb{H}^{d+1}}(x, \tilde{\mathcal{G}}) < s\}$ .

Denotemos por  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  el levantamiento de  $\mathcal{G}$  asociado a  $B_i = B(a_i, c R_i)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\tilde{\mathcal{G}}_i$  tiene punto final  $(0, \dots, 0)$  y punto inicial  $(2R_i, 0, \dots, 0)$ . Es suficiente comprobar que existe  $c'_0 > 0$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , se verifica:

Si  $H(x, R) \cap C(\tilde{\mathcal{G}}_i, s) = \emptyset$  y  $|x| \leq c'_0 R_i^r$ , entonces  $R \leq C R_i^r$ .

Definimos

$$\varphi(x) = \frac{x}{(2R_i, 0, \dots, 0) - x}.$$

Es claro que  $\varphi(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ ,  $\varphi(2R_i, \dots, 0) = \infty$ , y

$$\varphi(C(\tilde{\mathcal{G}}_i, s)) = \{x \in \mathbb{H}^{d+1} : |\langle (0, \dots, 0, 1), x \rangle| \geq |x| \cos \alpha\},$$

para algún  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Además, si  $x' \in \mathbb{R}^d$  y  $H(x', R') \cap \varphi(C(\tilde{\mathcal{G}}_i, s)) = \emptyset$ , es fácil comprobar que

$$(2.1) \quad R' \leq \frac{|x_0|}{m} [(1 + m^2)^{1/2} - 1],$$

con  $m = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ .

Por otra parte, como  $|\varphi'(x)| \sim 1/R_i$  para  $|x| \leq R_i$ , se obtiene que existe  $c'_0 > 0$  tal que si  $|x| \leq c'_0 R_i^r$ , entonces  $\varphi(H(x, R)) = H(x', R')$  verifica

$$(i) \quad R' \sim \frac{R}{R_i},$$

$$(ii) \quad |x'| < C \frac{R_i^r}{R_i}.$$

Por tanto de (2.1) se obtiene que  $R \leq C R_i^r$ .



## 5.2.1. Demostración de los lemas 12 y 13.

Los siguientes tres lemas son utilizados en la demostración del lema 12. Para grupos Fuchsianos ( $d=1$ ) son debidos a Patterson [P1, p. 545-547], las ideas para extenderlos a grupos geoméricamente finitos son esencialmente las mismas.

Denotemos por  $\mathcal{Y} = \{Y_\ell\}_{\ell=1}^m$  el conjunto de todas las cúspides de  $\mathcal{M}$ .

**Lema 15.** Sea  $H(a, R)$  una horobola asociada a la cúspide  $Y_\ell$  y sea  $w \in \partial H(a, R)$ . Entonces existe  $g \in G$  tal que  $g(w) \in \partial H(a, R)$  y

$$c'R \leq \|g(w) - a\| \leq R,$$

con  $c' > 0$  una constante que depende de  $Y_\ell$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $Y_\ell$  es una cúspide de rango máximo es claro que existe  $g$  en el estabilizador de  $a$  verificando la conclusión del lema 15. Estudiemos el caso en que la cúspide  $Y_\ell$  no es maximal.

Como  $G$  es geoméricamente finito  $\mathcal{M}_G = H(\Lambda(G))/G = X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell$ , donde  $H(\Lambda(G))$  es la envolvente convexa del conjunto límite de  $G$ ,  $X_0$  es compacto y los  $Y_\ell$  son cúspides (ver capítulo 1, secciones 1.1, 1.2).

Definimos  $D := \text{diametro}(X_0)$ .

Sea  $q = (q_1, \dots, q_{d+1})$  un punto en  $\partial H(a, R)$  tal que  $q_{d+1} = \frac{1}{4}R e^{-D}$ . Entonces, es claro que, para todo  $x$  en la bola hiperbólica  $B_h(q, D)$ , se tiene

$$c'R \leq \|x - a\| \leq R,$$

con  $c' > 0$ . Dado que  $w, q \in \mathcal{M}_G$  existe  $g \in G$  tal que  $g(w) \in B_h(q, D)$  y se obtiene el resultado deseado. ■

**Lema 16.** Para toda horobola  $H(a_{\ell'}, R_{\ell'})$  asociada a la cúspide  $Y_{\ell'}$ , existe una horobola  $H(a_\ell, R_\ell)$  asociada a la cúspide  $Y_\ell$ , tal que

$$\|a_{\ell'} - a_\ell\| < cR_{\ell'} \quad \text{y} \quad c_1 R_{\ell'} \leq R_\ell \leq c_2 R_{\ell'},$$

con constantes que dependen sólo de  $G$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $d(\ell, \ell')$  la distancia entre  $Y_\ell$  y  $Y_{\ell'}$ . Entonces existe una horobola  $H(a_\ell, R_\ell)$  asociada a  $Y_\ell$  tal que  $H(a_{\ell'}, R_{\ell'})$  y  $H(a_\ell, cR_\ell)$  con  $c = \exp d(\ell, \ell')$  son tangentes. Además, por el lema anterior existe  $g \in G$  tal que

$$(2.1.1) \quad c'R_{\ell'} \leq \|g(w) - a_{\ell'}\| \leq R_{\ell'},$$

donde  $w$  es el punto de tangencia y  $c' > 0$  es una constante dependiendo de  $Y_{\ell'}$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $H(a_\ell, R_\ell)$  verifica (2.1.1) con  $g$  igual a la identidad. Entonces, usando que las horobolas  $H(a_\ell, cR_\ell)$  y  $H(a_{\ell'}, R_{\ell'})$  son disjuntas y (2.1.1), se obtiene que

$$c'R_{\ell'} \leq cR_\ell \leq R_{\ell'} ,$$

con  $c = \exp d(\ell, \ell')$  y  $c' > 0$  una constante que depende de  $Y_{\ell'}$ .

Además,

$$\|a_{\ell'} - a_\ell\| \leq \|a_{\ell'} - w\| + \|w - a_\ell\| \leq 2R_{\ell'} + 2cR_\ell \leq 4R_{\ell'} .$$

Como el número de cúspides es finito  $R_\ell \sim R_{\ell'}$  con constantes absolutas y se concluye la demostración. ■

**Lema 17.** *Sea  $Y_\ell$  una cúspide de  $\mathcal{M}$ . Existe un número  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$  y una constante positiva  $c$  tales que, para todo  $n > 2$ , se verifica lo siguiente:*

*Si  $H(a, R)$ , con  $R < \rho^n$ , es una horobola asociada alguna de las cúspides, entonces existe una horobola  $H(a', R')$  asociada a la cúspide  $Y_\ell$  tal que*

$$(2.1.2) \quad R' \geq \rho^n \quad \text{y} \quad \|a - a'\| \leq c\sqrt{R'\rho^n} .$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $Y_\ell$  es la cúspide en infinito y que  $\{(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : s \geq 1\}$  es una horobola asociada a  $Y_\ell$ .

Tomamos  $\rho_0 \in (0, \frac{1}{2})$  tal que la envolvente convexa del conjunto límite  $H(\Lambda(G))$  verifique

$$H(\Lambda(G)) \subset \left( \bigcup_i H(a_i, R_i) \right) \cup \left( \bigcup_{g \in G} g(H_\infty) \right) ,$$

donde  $H_\infty = \{(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : s \geq \rho_0\}$  y  $\{H(a_i, R_i)\}$  es el conjunto de horobolas asociadas a todas las cúspides. Recordemos que por ser  $G$  geoméricamente finito  $\mathcal{M}_G = H(\Lambda(G))/G = X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^s Y_\ell$  con  $X_0$  compacto y por esto el número  $\rho_0$  existe.

Fijamos  $\rho \leq \min\{\rho_0, c_1\}$ , donde  $c_1$  es la constante que aparece en el lema anterior.

Sea  $n > 2$  y  $H(a, R)$  una horobola con  $R < \rho^n$ , queremos ver que existe  $H(a', R')$  asociada a  $Y_\ell$  verificando (2.1.2).

Sea  $w = (a, 2\rho^{n-1})$ . Es claro que  $w \in H(\Lambda(G))$  y además, como  $2R < 2\rho^{n-1} < \rho$ , se tiene que  $w \notin H(a, R)$  y  $w \notin H_\infty$ . Por lo tanto debe darse una de las siguientes dos condiciones:

- (i)  $w \in H(a_i, R_i)$  con  $H(a_i, R_i) \neq g(H_\infty)$ , para todo  $g \in G$ ,

(ii)  $w \in g(H_\infty)$ , para algún  $g \in G$ .

Para toda horobola  $H(a, R)$  en  $\mathbb{H}^{d+1}$  con punto base  $a \in \mathbb{R}^d$  y todo punto  $(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$  es claro que

$$(2.1.3) \quad (x, s) \in H(a, R) \quad \text{si y sólo si} \quad \|x - a\| \leq \sqrt{(2R - s)s}.$$

*Caso (i):*  $w \in H(a_i, R_i) \neq g(H_\infty)$ , para todo  $g \in G$ .

Por (2.1.3) se tiene que  $\|a - a_i\| \leq \frac{2}{\sqrt{\rho}} \sqrt{R_i \rho^n}$ . Además,  $2\rho^{n-1} \leq 2R_i$ . Si  $H(a_i, R_i)$  está asociada a la cúspide en infinito, entonces  $H(a', R') = H(a_i, R_i)$ . En caso contrario, por el lema 13, existe una horobola  $H(a', R')$  asociada a la cúspide en infinito tal que

$$\|a' - a_i\| < 4R_i \quad \text{y} \quad c_1 R_i \leq R' \leq c_2 R_i.$$

Por lo tanto,  $R' \geq c_1 R_i \geq c_1 \rho^{n-1} \geq \rho^n$ , y

$$\|a - a'\| \leq \|a - a_i\| + \|a' - a_i\| < \frac{2}{\sqrt{\rho}} \sqrt{R_i \rho^n} + 4R_i.$$

*Caso (ii):*  $w \in g(H_\infty)$ , para algún  $g \in G$ .

Es claro que  $g(H_\infty) = H(a_i, R_i/\rho)$ , para alguna horobola  $H(a_i, R_i)$  asociada a la cúspide en infinito. Por lo tanto, usando (2.1.3), se obtiene que

$$\|a - a_i\| \leq \frac{2}{\rho} \sqrt{R_i \rho^n}.$$

Además,  $2\rho^{n-1} \leq \frac{2}{\rho} R_i$ . ■

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 12. Por el teorema ST es claro que existe  $t \in (0, 1)$  tal que

$$(2.1.4) \quad \mu(\mathcal{B}) \sim \mu(t\overline{\mathcal{B}}) \sim \mu(\overline{(2-t)\mathcal{B}}),$$

con constantes absolutas. Fijamos  $t$  en el resto del argumento.

Denotemos por  $\Lambda_p(t\mathcal{B})$  el conjunto de puntos fijos parabólicos en  $t\mathcal{B}$ . Por el lema 17, para todo  $x \in \Lambda_p(t\mathcal{B})$ , existe  $H(a', R')$ , horobola asociada a  $Y_\ell$ , tal que

$$\|x - a'\| \leq c\sqrt{R'\rho^n} \quad \text{y} \quad R' \geq \rho^n.$$

Tomamos  $n_0$  suficientemente grande como para que, para todo  $n \geq n_0$  y para toda horobola  $H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})$  asociada a la cúspide  $Y_\ell$ , tengamos que  $c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n} < (1-t)r$ , donde  $r$  es el radio de  $\mathcal{B}$ .

Entonces, para todo  $n \geq n_0$ , se tiene que

$$\Lambda_p(t\mathcal{B}) \subset \bigcup_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} B(a_{\ell,i}, c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n}) \subset (2-t)\mathcal{B}.$$

Pero  $\overline{\Lambda_p(t\mathcal{B})}$  es igual al conjunto de puntos límites en  $t\overline{\mathcal{B}}$ , que denotaremos por  $\Lambda(t\overline{\mathcal{B}})$ , y obtenemos

$$\Lambda(t\overline{\mathcal{B}}) \subset \bigcup_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} \overline{B}(a_{\ell,i}, c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n}) \subset \overline{(2-t)\mathcal{B}}.$$

Por lo tanto, usando (2.1.4), se tiene que

$$(2.1.5) \quad \mu\left(\bigcup_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} \overline{B}(a_{\ell,i}, c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n})\right) \sim \mu(\mathcal{B}).$$

Como las horobolas son disjuntas, para cualquier par  $H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i})$  y  $H(a_{\ell,i'}, R_{\ell,i'})$  se verifica que

$$\|a_{\ell,i} - a_{\ell,i'}\| > 2R_{\ell,i}^{1/2}R_{\ell,i'}^{1/2},$$

y, por consiguiente, si  $R_{\ell,i}, R_{\ell,i'} \geq \rho^n$ , entonces

$$\overline{B}(a_{\ell,i}, \sqrt{R_{\ell,i}\rho^n}) \cap \overline{B}(a_{\ell,i'}, \sqrt{R_{\ell,i'}\rho^n}) = \emptyset.$$

Usando esto en (2.1.5) obtenemos

$$(2.1.6) \quad \mu(\mathcal{B}) \sim \sum_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} \mu(\overline{B}(a_{\ell,i}, c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n})).$$

Además, por el teorema ST,

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B}(a_{\ell,i}, c\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n})) &\sim \left(\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n}\right)^{\delta(G)} \left(\frac{R_{\ell,i}}{\sqrt{R_{\ell,i}\rho^n}}\right)^{k(\ell)-\delta(G)} \\ &\sim R_{\ell,i}^{k(\ell)/2} \rho^{n(\delta(G)-k(\ell)/2)}, \end{aligned}$$

donde  $k(\ell)$  es el rango de la cúspide  $Y_\ell$ . Utilizando esta estimación en (2.1.6) se obtiene que

$$\mu(\mathcal{B}) \sim \sum_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} R_{\ell,i}^{k(\ell)/2} \rho^{n(\delta(G)-k(\ell)/2)}.$$



Por lo tanto,

$$c_1 \rho^{n((k(\ell)/2) - \delta(G))} \mu(\mathcal{B}) \leq \sum_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ R_{\ell,i} \geq \rho^n}} R_{\ell,i}^{k(\ell)/2} \leq c_2 \rho^{n((k(\ell)/2) - \delta(G))} \mu(\mathcal{B}),$$

con  $c_1, c_2 > 0$ .

Se obtiene un resultado similar para  $n+1$  y utilizando ambas desigualdades se tiene que

$$c'_1 \rho^{n((k(\ell)/2) - \delta(G))} \mu(\mathcal{B}) \leq \sum_{\substack{a_{\ell,i} \in \mathcal{B} \\ \rho^{n+1} \leq R_{\ell,i} < \rho^{n+1}}} R_{\ell,i}^{k(\ell)/2} \leq c'_2 \rho^{n((k(\ell)/2) - \delta(G))} \mu(\mathcal{B}),$$

con

$$c'_1 = \frac{c_1}{\rho^{1/2}} - c_2 \quad \text{y} \quad c'_2 = \frac{c_2}{\rho^{1/2}} - c_1.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} c'_1 \frac{1}{\rho^{n\delta(G)}} \mu(\mathcal{B}) &\leq \# \{ H(a_{\ell,i}, R_{\ell,i}) : a_{\ell,i} \in \mathcal{B}, R_{\ell,i} \in [\rho^{n+1}, \rho^n] \} \\ &\leq \frac{c'_2}{\rho^{1/2}} \frac{1}{\rho^{n\delta(G)}} \mu(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Tomando  $\rho$  suficientemente pequeño para que  $c'_1 > 0$  se completa la demostración. ■

**DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 13.** Este resultado se sigue del lema 12 y el siguiente lema cuya demostración es similar a la del lema 16 y no incluiremos.

**Lema 18.** *Para todo levantamiento  $\tilde{\mathcal{G}}$  de la geodésica cerrada  $\mathcal{G}$ , existe una horobola  $H(a_\ell, R_\ell)$  asociada a la cúspide  $Y_\ell$ , tal que*

$$\|\eta - a_\ell\| < c R_\ell \quad \text{y} \quad c_1 R_\ell \leq R \leq c_2 R_\ell,$$

donde  $\eta$  es el punto final de la geodésica  $\tilde{\mathcal{G}}$  y  $R$  es su radio. Las constantes dependen sólo de  $G$ .



## Capítulo 6

### Geodésicas acotadas en variedades hiperbólicas

En este capítulo discutimos primero el caso de superficies de Riemann; las modificaciones para el caso de variedades hiperbólicas se discuten en la sección 6.5.

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann y  $p$  un punto en  $\mathcal{R}$ . Decimos que la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  con punto inicial  $p$  está acotada si, para todo tiempo  $t \geq 0$ , permanece a una distancia acotada del punto  $p$ . Nos interesa estudiar el conjunto  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}(t)$  está acotada. En este contexto obtenemos el siguiente resultado. Escribimos  $\mathbb{R} \cong \Delta/G$ , donde  $G$  es un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos.

**Teorema 14.** *Para toda superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ , distinta del disco punteado, y para todo  $p \in \mathcal{R}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  es  $\delta(G)$ . Si  $\mathcal{R}$  es el disco punteado  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  es vacío.*

**OBSERVACIÓN.** Sin cambios esenciales se obtiene el mismo resultado cuando permitimos que  $G$  tenga transformaciones elípticas.

El caso de superficies de Riemann excepcionales con sus geometrías canónicas es muy simple.  $\hat{\mathbb{C}}$  y el toro son superficies compactas. En el plano ninguna geodésica está acotada, mientras que en el cilindro,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sólomente dos geodésicas desde cada punto lo están.

El origen de esta clase de resultados es un teorema clásico de Jarník [J] (ver capítulo 1, sección 1.4).

Para superficies de área finita el exponente de convergencia es uno y era ya conocido que el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}$  está acotada tenía dimensión de Hausdorff uno. Este resultado es una consecuencia de la extensión de S.J. Patterson [P1] al teorema de Jarník. Posteriormente, S.G. Dani utilizando la noción de conjuntos ganadores de una versión métrica debida a W. Schmidt [Sch1] de un juego de Banach-Mazur (ver capítulo 1, sección 1.4) extendió el resultado y probó en [D1] que para cualquier variedad Riemanniana  $\mathcal{M}$

completa de curvatura seccional constante negativa y con volumen finito el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que  $\gamma_{p,v}$  está acotada tiene dimensión de Hausdorff plena. Algunos casos particulares de este resultado fueron también considerados por A. Manning en [M]. Recientemente, C.S. Aravinda en [Ar] utilizando de nuevo la noción de conjuntos ganadores ha obtenido una versión más fuerte del resultado de S.G. Dani para variedades Riemannianas completas de curvatura seccional constante negativa y con volumen finito.

El teorema 14 es válido para superficies de Riemann arbitrarias sin ninguna hipótesis de finitud y, por tanto, completa este tipo de resultados en el caso dos dimensional.

En dimensión superior con  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  y  $G = \cup G_n$  donde  $\{G_n\}$  es una sucesión creciente de subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$  una demostración similar a la del teorema 14 da el mismo resultado cuando  $\mathcal{M}$  no tiene cúspides o  $\mathcal{M}$  tiene alguna cúspide maximal. En particular, esto incluye el teorema de S.G. Dani, puesto que si  $\mathcal{M}$  tiene volumen finito todas las cúspides son maximales.

Para variedades hiperbólicas de dimensión tres obtenemos también el siguiente resultado general sin ninguna hipótesis sobre el rango de las cúspides.

**Teorema 15.** *Para toda variedad hiperbólica geoméricamente finita de dimensión tres,  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$ , excepto los cocientes de grupos parabólicos, y todo  $p \in \mathcal{M}$ , la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)$  es  $\delta(G)$ .*

Este resultado es también válido para  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$  con  $G$  una unión creciente de grupos Kleinianos geoméricamente finitos.

El estudio de las geodésicas acotadas (y en general de órbitas acotadas de flujos) es de interés muy actual. Tras la compleción de la prueba de los teoremas 14 y 15 (y su distribución en forma de prepublicación), B. Stratman de la Universidad de Göttingen nos comunicó que él también acababa de obtener resultados similares para subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . Nuestro resultado es más fuerte en dimensión dos puesto que es válido para superficies de Riemann arbitrarias sin ninguna hipótesis de finitud. Por otra parte, en [St] se estudia el caso de variedades hiperbólicas  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^{d+1}/G$  de tipo finito con cúspides y ninguna de ellas de rango maximal para todo  $d \geq 2$ . En nuestro trabajo sólo nos planteamos este problema para  $d = 2$ . Las demostraciones son diferentes.

Muy recientemente, C. Bishop y P. Jones han demostrado en [BJ] que si  $G$  es un subgrupo discreto de  $\text{Möb}(\mathbb{B}^3)$  no elemental entonces la dimensión de Hausdorff del conjunto límite cónico de  $G$  es igual al exponente de convergencia de  $G$ . En particular de su prueba también se obtiene que si  $\mathcal{M} \cong \mathbb{B}^3/G$  con  $G$  finitamente generado entonces  $DH(\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)) = \delta(G)$ .



C. Bishop y P. Jones también demuestran que para todo subgrupo de Möb ( $\mathbb{B}^3$ ) finitamente generado que es geoméricamente infinito, la dimensión de Hausdorff del conjunto límite es 2. Por tanto, si  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$ , y la dimensión de Hausdorff del conjunto límite  $\Lambda(G)$  es menor que dos, entonces cualquier subgrupo finitamente generado de  $G$  es geoméricamente finito y, en consecuencia,  $G$  es una unión creciente de grupos Kleinianos geoméricamente finitos. Se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 16.** *Para toda variedad hiperbólica de dimensión tres  $\mathcal{M} \cong \mathbb{H}^3/G$  con  $DH(\Lambda(G)) < 2$ , excepto los cocientes de grupos parabólicos, y todo  $p \in \mathcal{M}$  la dimensión de Hausdorff de  $\mathcal{B}(\mathcal{M}, p)$  es  $\delta(G)$ .*

En la sección 6.1 se establece una relación entre el conjunto de las geodésicas acotadas y el conjunto límite cónico. En la sección 6.2 se demuestra cómo se reduce la prueba del teorema 14 al caso de superficies de Riemann de tipo finito, es decir, con grupo fundamental finitamente generado. Este caso es posteriormente dividido en dos subcasos. Si no hay cúspides la prueba es bastante fácil y se describe en la sección 6.3. En el caso más interesante de superficies de Riemann con cúspides obtenemos una versión más precisa del teorema 14 (teorema 17) así como un resultado tipo Jarník para grupos geoméricamente finitos con elementos parabólicos (teorema 14"). Este es el contenido de la sección 6.4. La sección 6.6 contiene algunas aplicaciones de los teoremas 14 y 14". La versión tres dimensional, teorema 15, se explica en la sección 6.5.

### 6.1. Conexión con el conjunto límite cónico.

Sea  $\mathcal{R} = \Delta/G$ , donde  $G$  es un grupo Fuchsiano actuando en el disco unidad del plano complejo,  $\Delta$ , sin elementos elípticos. Definimos un subconjunto  $\Lambda_b(G)$  del conjunto límite cónico de la siguiente manera: decimos que  $e^{i\theta} \in \partial\Delta$  pertenece a  $\Lambda_b(G)$  si existen  $\rho = \rho(e^{i\theta}) < 1$ ,  $d = d(e^{i\theta}) > 0$  y una sucesión  $\{g_n\}$  de elementos de  $G$  tales que

$$(i) \quad |e^{i\theta} - \gamma_n(0)| < c(1 - |g_n(0)|)$$

y

$$(ii) \quad \frac{1}{d} \rho^n \leq (1 - |g_n(0)|) \leq d \rho^n.$$

Obsérvese que la primera condición define los puntos límites cónicos. Por otra parte, es claro que si usamos otro punto  $z \in \Delta$  en lugar del 0 se obtiene el mismo conjunto. Geométricamente, las condiciones (i) y (ii) simplemente significan que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \text{dist}(re^{i\theta}, G(0)) < \infty.$$

o, equivalentemente, que la geodésica en  $\Delta$  desde 0 (ó  $z \in \Delta$ ) con punto final  $e^{i\theta}$  permanece en todo tiempo a una distancia acotada de la órbita del 0 (ó  $z$ ). Aquí  $dist$  denota la distancia hiperbólica en  $\Delta$ .

Sea  $\gamma_v$  una geodésica en  $\mathcal{R} = \Delta/G$ , y  $\tilde{\gamma}_v$  un levantamiento en  $\Delta$  de  $\gamma_v$ . Es fácil ver que si  $\gamma_v$  es acotada, entonces el punto final de  $\tilde{\gamma}_v$  tiene que ser un punto en  $\Lambda_b(\Gamma)$ , y recíprocamente. Por lo tanto usando el resultado conocido (ver capítulo 1, sección 1.5) que nos dice que la dimensión de Hausdorff del conjunto límite cónico  $\Delta_c(G)$  de un grupo Fuchsiano  $G$ , coincide con su exponente de convergencia,  $\delta(G)$ , se tiene

$$DH(\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)) = HD(\Lambda_b(G)) \leq HD(\Delta_c(G)) = \delta(G).$$

## 6.2. Reducción a superficies de tipo finito.

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann con  $\mathcal{R} = \mathbb{H}^2/G$ , donde  $G$  es un grupo Fuchsiano sin elementos elípticos. Como hemos visto en la sección anterior se tiene que

$$DH(\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)) \leq \delta(G).$$

Veremos ahora que si el teorema 14 se supone cierto para superficies de Riemann de tipo finito, entonces la desigualdad opuesta se verifica para  $\mathcal{R}$ .

Sea  $G_n$  una sucesión creciente de grupos geoméricamente finitos cuya unión es  $G$ . En dimensión dos los conceptos de grupos geoméricamente finitos y finitamente generados coinciden y por esto es claro que tal sucesión existe. Por un teorema de Sullivan, [S1], se tiene que

$$\delta(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(G_n).$$

Por otra parte, es claro que, para todo  $n$ ,

$$\Lambda_b(G_n) \subset \Lambda_b(G),$$

y además como  $G_n$  es un grupo geoméricamente finito estamos suponiendo que  $DH(\Lambda_b(G_n)) = \delta(G_n)$ . Por lo tanto se concluye que  $DH(\Lambda_b(G)) \geq \delta(G)$ .

## 6.3. Superficies de Riemann de tipo finito sin cúspides.

Si  $\mathcal{R}$  es una superficie de Riemann de tipo finito sin cúspides se tiene que

$$\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G \cong X_0 \cup \bigcup_{s=1}^n Z_s,$$

donde  $X_0$  es compacto y los  $Z_s$  son foniles (ver capítulo 1, sección 1.1). Para este tipo de superficies el conjunto  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  corresponde al conjunto de geodésicas que permanecen dentro de una región acotada fija en  $\mathcal{R}$  la cual no depende de la geodésica y contiene al punto  $p$ .

Denotemos por  $C(\mathcal{R})$  el *núcleo convexo* ("convex core") de  $\mathcal{R}$ , i.e.,

$$C(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \setminus \bigcup_{s=1}^n Z_s$$

Como el núcleo convexo  $C(\mathcal{R})$  es compacto, una geodésica  $\gamma_v$  que permanece en  $C(\mathcal{R})$  en todos los tiempos es acotada. Pero  $\gamma_v$  permanece en  $C(\mathcal{R})$  si y sólo si un levantamiento  $\tilde{\gamma}_v$  de  $\gamma_v$  en  $\mathbb{H}^2$  permanece en  $C(\Lambda(G))$ , la envolvente convexa en  $\mathbb{H}^2$  del conjunto límite. Por lo tanto,  $DH(\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)) \geq DH(\Lambda(G))$ . Además como  $G$  es geoméricamente finito y no tiene elementos parabólicos  $\Lambda(G) = \Lambda_c(G)$ . Por consiguiente,  $DH(\mathcal{B}(p)) \geq \delta(G)$ .

Obsérvese que para superficies de Riemann de tipo finito sin cúspides, los tres conjuntos límites que hemos considerado coinciden,  $\Lambda(G) = \Lambda_c(G) = \Lambda_b(G)$ . Sin embargo, si la superficie tiene alguna cúspide no es difícil ver que los tres son diferentes.

#### 6.4. Superficies de Riemann de tipo finito con cúspides.

En este caso la superficie  $\mathcal{R}$  se puede descomponer en la siguiente unión disjunta

$$\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G \cong X_0 \cup \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell \cup \bigcup_{s=1}^n Z_s$$

donde  $X_0$  es compacta, los  $Y_\ell$  son cúspides y los  $Z_s$  foniles.

Una dirección  $v \in S(p)$  pertenece a  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, p)$  si la geodésica  $\gamma_v$  permanece dentro de una región acotada en  $\mathcal{R}$ . Ahora la región contiene de nuevo al punto  $p$  pero la diferencia está en que depende de la geodésica. Obtenemos una versión más precisa del teorema 14 que describimos a continuación.

Para toda cúspide  $Y_\ell$  y todo  $h \geq 0$ , denotemos por  $Y_\ell(h)$  la región de  $Y_\ell$  isométrica a  $S^1 \times [\log 2\pi + h, +\infty)$ . Esta región corresponde al conjunto de puntos de  $Y_\ell$  que están al menos a distancia  $h$  de la frontera. Llamaremos a la distancia a la frontera dentro de una cúspide la *altura* en la cúspide. Consideremos ahora el conjunto  $\mathcal{B}(p, h)$  de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_v$  permanece en

$$C(\mathcal{R}) \setminus \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell(h)$$

en todos los tiempos.



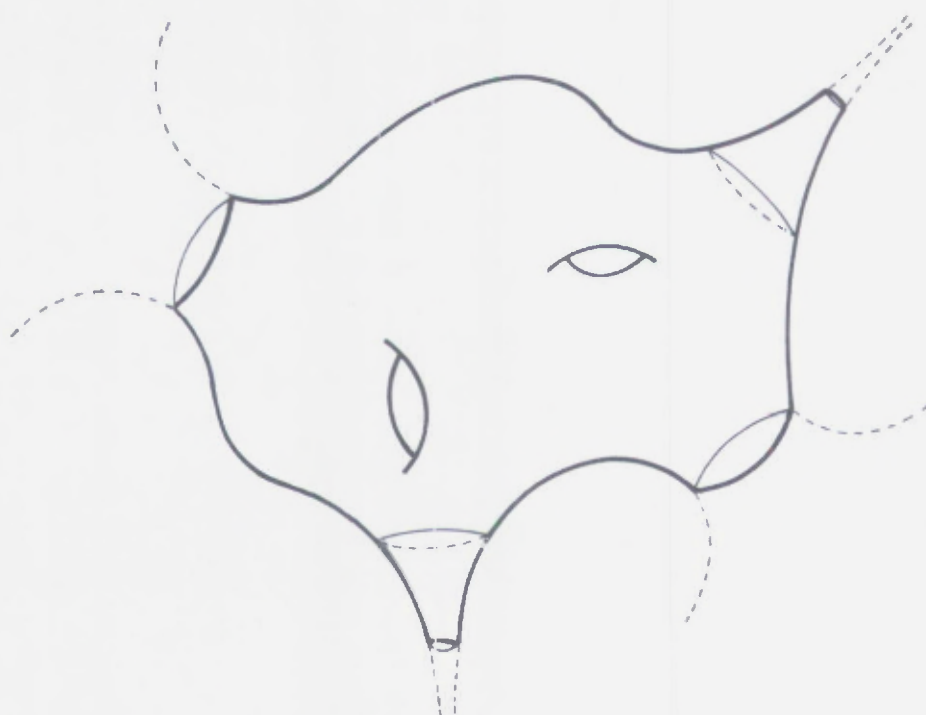


Figura 11

Se obtiene la siguiente estimación de la dimensión de Hausdorff del conjunto  $\mathcal{B}(p, h)$ .

**Teorema 17.** *Sea  $\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G$  de tipo finito y con al menos una cúspide. Entonces, existe  $c = c(G) > 0$  tal que, para todo  $h > 0$ ,*

$$DH(\mathcal{B}(p, h)) \geq \delta(G) - \frac{c}{h}.$$

Sea  $\{H(a_i, R_i)\}$  el conjunto de todos los horodiscos correspondientes a todas las cúspides de  $G$ . Para todo  $t > 0$  denotamos por  $A(t)$  el conjunto de puntos  $\xi \in \Lambda(G)$  tales que, para todo  $i$ ,

$$|\xi - a_i| > t R_i.$$

El conjunto  $\cup_{t>0} A(t)$  es el conjunto de los puntos mal aproximables por puntos fijos parabólicos y el teorema 16 se sigue de la siguiente estimación del tamaño de cada  $A(t)$ .

**Theorem 14'.** *Sea  $\mathcal{R} \cong \mathbb{H}^2/G$  una superficie de Riemann de tipo finito con al menos una cúspide. Entonces para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,*

$$M_{\delta(G)-\varepsilon}(A(t)) > 0,$$



donde  $\varepsilon = c/|\log t|$ , y  $c$  es una constante positiva. En particular,

$$DH(A(t)) \geq \delta(G) - \varepsilon.$$

OBSERVACIÓN: Como vimos en la sección 6.1 es también claro que  $DH(A(t)) \leq \delta(G)$ .

El teorema 17 se obtiene a partir del teorema 14' y la siguiente observación geométrica: podemos identificar de una manera suave el conjunto  $A(ct)$  como un subconjunto de  $B(p, c \log(1/t))$ . Veamos ahora cómo se hace dicha identificación.

Sea  $\gamma_v$  una geodésica en  $\mathcal{R}$  y  $\tilde{\gamma}_v$  un levantamiento de  $\gamma_v$  en  $\mathbb{H}^2$ . Sea  $x \in \mathbb{R}$  el punto final de  $\tilde{\gamma}_v$  y sea  $H(a, R)$  un horodisco asociado a alguna cúspide  $Y_i$ . Denotemos por  $t_1$  el tiempo de entrada de  $\tilde{\gamma}_v$  en  $H(a, R)$  y por  $t_2$  el tiempo de salida. Entonces, si  $|x - a| = r \leq R$ , la altura máxima alcanzada por  $\gamma_v$  en la cúspide  $Y_i$  entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , es comparable a  $\log(R/r)$ . (Esta observación ha sido ya utilizada en el capítulo 3, sección 1). Pero si  $x \in A(ct)$  entonces la altura máxima alcanzada en todas las cúspides es finita, y como, además  $x \in \Lambda(G)$ , entonces la geodésica  $\gamma_v$  permanece en  $C(\mathcal{R}) \setminus \bigcup_{\ell=1}^m Y_\ell(h)$ , para algún  $h$ .

En la demostración del teorema anterior sólo se usa que  $G$  es un subgrupo geoméricamente finito de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$  con elementos parabólicos y por tanto, en general, se tiene el siguiente resultado de aproximación tipo Jarník para estos grupos.

**Teorema 14''.** Sea  $\{H(a_i, R_i)\}$  el conjunto de todos los horodiscos correspondientes a todas las cúspides de  $G$ . Entonces la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos límites  $\xi \in \Lambda(G)$  tales que, para todo  $i$ ,

$$|\xi - a_i| \geq C(\xi) R_i,$$

es  $\delta(G)$ .

La clave de la demostración del teorema 17 es la construcción de unos ciertos conjuntos tipo Cantor contenidos en  $\bigcup_{t>0} A(t)$ . La descripción de estos conjuntos es el contenido del siguiente lema.

**Lema 19.** Existen  $0 < \rho < 1/2$ ,  $c > 0$ , y  $n_1 \in \mathbb{N}$  tales que, para todo  $n \geq n_1$  y  $t = \rho^n$ , existe un conjunto tipo Cantor  $C_t$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $C_t = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{I_k \in \mathcal{I}_k} I_k$  donde  $\mathcal{I}_0 = \{I_0 = I(a, r_0)\}$  con  $r_0 > t$  y, en general, para  $k \geq 1$ , cada  $\mathcal{I}_k$  es una colección finita de intervalos disjuntos en  $\mathbb{R}$  con radios comparables a  $r_k = tr_{k-1}$ .
- (ii) Si  $I(a, r) \in \mathcal{I}_j$ , entonces el centro  $a$  es el punto base de algún horodisco  $H(a, R)$  correspondiente a una cúspide fija  $\mathcal{E}$  y el radio  $r$  es igual  $sR$  con  $s$  una constante

positiva. Además,  $r \sim tr'$ , donde  $r'$  es el radio de un intervalo de la familia  $\mathcal{I}_{j-1}$

- (iii) Existe una constante  $c'$ ,  $0 < c' < 1$ , tal que cada intervalo en  $\mathcal{I}_j$  está contenido en algún intervalo de  $c'\mathcal{I}_{j-1}$ .
- (iv) Para todo  $j$ , todo intervalo de  $\mathcal{I}_j$  contiene el mismo número de intervalos de  $\mathcal{I}_{j+1}$ . Este número es comparable a  $1/t^{\delta(G)}$

Finalmente,

$$(v) \quad A(ct) \supset C_t.$$

$$(vi) \quad M_{\delta(G)-\varepsilon}(C_t) > 0, \text{ si } \varepsilon = c/|\log t|.$$

También necesitamos algunas propiedades de la medida de Patterson (ver capítulo 1, sección 1.6).

**Teorema ST** ([S3], [T2]). Sea  $\xi \in \Lambda(G)$ , entonces

$$\mu(I(\xi, r)) \sim r^{\delta(G)} \Phi((\xi, r)),$$

donde  $\Phi((\xi, r)) \sim (R/r)^{1-\delta}$  si el punto  $(\xi, r) \in \mathbb{H}^2$  pertenece a un horodisco de radio  $R$  correspondiente a una cúspide. En caso contrario  $\Phi((\xi, r)) \sim 1$ .

**OBSERVACIÓN.** Existe un resultado análogo en dimensión superior. Específicamente, si el punto  $(\xi, r) \in \mathbb{H}^{d+1}$  pertenece a una horobola  $H(a, R)$  asociada a una cúspide  $\mathcal{E}$  de rango  $k$ , entonces  $\Phi((\xi, r)) \sim (R/r)^{k-\delta}$ . En caso contrario,  $\Phi((\xi, r)) \sim 1$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 17.** El teorema 17 se obtiene directamente de las propiedades (v) y (vi) del conjunto tipo Cantor descrito en el lema 19. Probaremos ahora como se obtienen estas dos propiedades y postpondremos la construcción del Cantor al final de esta sección. ■

**PRUEBA DE LA PARTE (V) DEL LEMA 19.** Obsérvese que hemos fijado una cúspide  $\mathcal{E}$ , y a primera vista parece que sólo se tiene información sobre la altura alcanzada dentro de la cúspide especificada.

Para probar que  $C_t \subset A(ct)$ , sea  $\xi \in C_t$ ; entonces para cada  $j = 0, 1, 2, \dots$ , existe un horodisco  $H(a_j, R_j)$ , asociado a  $\mathcal{E}$ , tal que  $|\xi - a_j| < c_0 r_j$  con  $r_j \sim R_j$  y  $c_0$  una constante positiva.

Un argumento geométrico elemental muestra que para dos horodiscos disjuntos  $H(a, R)$  y  $H(b, S)$  se tiene

$$(3.1) \quad |a - b| \geq 2 R^{1/2} S^{1/2}.$$

Ahora, sea  $H(a, R)$  un horodisco correspondiente a alguna cúspide, no necesariamente aquella que hemos fijado en la construcción de  $C_t$ . Debemos demostrar que

$$(3.2) \quad |\xi - a| > ctR.$$

Usando (3.1) se obtiene

$$(3.3) \quad |\xi - a| \geq |a - a_j| - |\xi - a_j| \geq 2R^{1/2}R_j^{1/2} - c_0r_j.$$

Como  $r_j \sim R_j$  para todo  $j$ , existen constantes absolutas  $c_1, c_2 > 0$ , tales que  $c_1r_j \leq R_j \leq c_2r_j$ . Si  $R \geq c_0^2r_0/c_1$ , entonces por (3.3) para  $j = 0$ , se tiene que  $|\xi - a| > c_0r_0 > c_0t$ . Como  $R \leq 1$  se obtiene (3.2) con  $c = c_0$ .

Por otra parte, si  $R < c_0^2r_0/c_1$ , como la sucesión  $\{r_j\}$  tiende a cero, existe  $j \geq 1$  tal que  $c_0^2r_j \leq c_1R < c_0^2r_{j-1}$ . Entonces, usando que  $c_1r_j \leq R_j(\xi)$  y que  $R \geq c_0^2r_j/c_1$  en (3.3), obtenemos  $|\xi - a| \geq c_0r_j$ . Finalmente,  $r_j = tr_{j-1} > (c_1/c_0^2)tR$ , lo cual da la desigualdad deseada (3.2). ■

PRUEBA DE LA PARTE (VI) DEL LEMA 19. Si  $C_t \subset A(ct)$  es el conjunto tipo Cantor del lema, debemos demostrar que

$$(3.4) \quad M_{\delta(G)-\varepsilon}(C_t) > 0,$$

con  $\varepsilon = c/|\log t|$ , y  $c$  una constante positiva independiente de  $t$ . Para probar (3.4), construiremos una medida de probabilidad  $\nu_t$  soportada en  $C_t$ , con la propiedad que para todo intervalo  $I = I(a_I, r_I)$ ,

$$(3.5) \quad \nu_t(I) \leq Cr_I^{\delta(G)-\varepsilon},$$

con  $C > 0$ ,  $\varepsilon = c/|\log t|$ , y  $c$  una constante positiva independiente de  $t$ .

Es claro que entonces, para todo cubrimiento  $\{I_s = I(a_s, r_s)\}$  de  $C_t$ , tendremos que

$$1 = \nu_t(C_t) \leq \sum_s \nu_t(I_s) \leq C \sum_s r_s^{\delta(G)-\varepsilon},$$

y, en consecuencia,  $M_{\delta(G)-\varepsilon}(C_t) > 0$

Definimos  $\nu_t$  en los intervalos de las sucesivas generaciones  $\{\mathcal{I}_k\}$  de manera inductiva. Primero,  $\nu_t(I_0) = 1$  y, entonces,

$$\nu_t(I_{k+1}) = \nu_t(I_{k+1} \cap C_t) := \frac{1}{\frac{\#I_{k+1}}{\#I_k}} \nu_t(I_k), \quad \text{para todo } I_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}.$$

Para cualquier conjunto  $U \subset \mathbb{R}$  definimos

$$\nu_t(U) := \inf_{F \in \mathcal{F}} \sum \nu_t(F),$$



donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos  $\mathcal{F}$  de  $U$  con intervalos en  $\cup_{k \geq 0} \mathcal{I}_k$ .

Como

$$\frac{\#\mathcal{I}_{k+1}}{\#\mathcal{I}_k} \sim \frac{1}{t^{\delta(G)}},$$

se tiene que  $\nu_t(I_{k+1}) \sim t^{\delta(G)} \nu_t(I_k)$ .

Para verificar (3.5) supongamos primero que  $I = I_k \in \mathcal{I}_k$ . Entonces, existen  $c_1, c_2 > 0$ , independientes de  $t$ , tal que  $\nu_t(I_k) \leq (c_1 t^{\delta(G)})^k$  y  $r_I \geq (c_2 t)^k$ . No es difícil comprobar que tomando  $t = \rho^n$  suficientemente pequeño, es decir,  $n$  suficientemente grande, se tiene para

$$\varepsilon \geq \frac{\delta(G) \log c_2 - \log c_1}{\log t c_2} \geq \frac{c}{|\log t|},$$

que

$$\nu_t(I_k) \leq (c_1 t^{\delta(G)})^k \leq (c_2 t)^{k(\delta(G)-\varepsilon)} \leq r_I^{\delta(G)-\varepsilon}.$$

Supongamos ahora que  $I \neq I_k$  para todo  $I_k \in \mathcal{I}_k$  y todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Si  $I \not\subset I_0$  y  $I \cap C_t \neq \emptyset$ , entonces como  $C_t \subset c'I_0$  se tiene que  $2r_I \geq (1 - c')r_0$ . Así, si  $\nu_t(c'I_0) \leq C(c'r_0)^{\delta(G)-\varepsilon}$ , también se obtiene que

$$\nu_t(I) \leq \nu_t(c'I_0) \leq C(c'r_0)^{\delta(G)-\varepsilon} \leq C'r_I^{\delta(G)-\varepsilon}.$$

Por lo tanto, podemos suponer que  $I \subset c'I_0$ .

Sea  $k = k(I) = \max\{j : I \subset I_j \text{ para algún } I_j \in \mathcal{I}_j\}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $I$  intersecta al menos dos intervalos de la generación  $c'\mathcal{I}_{k+1}$  y en consecuencia existen  $c_3, c_4 > 0$  tales que  $c_3 r_{k+1} \leq r_I \leq c_4 r_k$ . Como  $r_{k+1} = tr_k$ , obtenemos  $c_3 tr_k \leq r_I \leq c_4 r_k$ .

Por otra parte, se tiene que

$$\nu_t(I) \leq \sum_{I \cap I_{k+1} \neq \emptyset} \nu_t(I_{k+1}) < c_1 t^{\delta(G)} \#\{I_{k+1} : I \cap I_{k+1} \neq \emptyset\} \nu_t(I_k).$$

Comparando  $\mu$ -medidas es claro que

$$\#\{I_{k+1} : I \cap I_{k+1} \neq \emptyset\} \mu(I_{k+1}) \leq \mu(I_k).$$

Por (i), (ii) del lema 19, sabemos que cada  $I_j \in \mathcal{I}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , está centrado en un punto fijo parabólico y que  $r_j$  es comparable al radio del horodisco con el mismo punto base correspondiente a la cúspide  $Y$ . Por lo tanto, la  $\mu$ -medida de cada  $I_j$  es comparable a la  $\mu$ -medida del correspondiente horodisco. Usando que  $r_j \sim tr_{j-1}$  y el teorema ST,

$$\mu(I_{k+1}) \sim r_{k+1}^{\delta(G)} \sim (tr_k)^{\delta(G)} \sim t^{\delta(G)} \mu(I_k),$$



En consecuencia,

$$\#\{I_{k+1} : I \cap I_{k+1} \neq \emptyset\} \leq \frac{C''}{t^{\delta(G)}},$$

y obtenemos que

$$\nu_t(I) \leq c_1 C'' \nu_t(I_k) \leq C' r_k^{\delta(G)-\varepsilon} \leq C r_I^{\delta(G)-\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

#### CONSTRUCCIÓN DE LOS CONJUNTOS DE CANTOR. PRUEBA DEL LEMA 19.

La construcción de los conjuntos de Cantor del lema 19 requiere los próximos dos lemas cuya demostración pospondremos hasta el final de esta sección. El primero concierne a la equidistribución de los horodiscos correspondientes a una cúspide.

**Lema 20.** *Existen  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $s \geq 1$ , tales que para cada cúspide  $Y$  podemos encontrar un horodisco  $H' = H(a', R')$  asociado a  $Y$  con la propiedad de que: para todo  $n \geq n_0 = n_0(G, s)$  existe una colección  $T_n(Y)$  de horodiscos correspondientes a la cúspide  $Y$  tal que*

(i) *Si  $H(a, R) \in T_n(Y)$ , entonces  $a \in I(a', sR')$  y  $R \in [\rho^{n+1}, \rho^n]$ .*

(ii)  $\#T_n(Y) \sim \left(\frac{1}{\rho^n}\right)^\delta$ .

Obsérvese que existe  $c_1 > 0$  tal que, para  $n$  suficientemente grande,

$$\sum_{H(a, R) \in T_n(Y)} \mu(I(a, R)) \leq c_1 \mu(I(a', sR')).$$

Además,

$$\sum_{H(a, R) \in T_n(Y)} \mu(I(a, R)) \sim \#T_n(Y) (\rho^n)^{\delta(G)}.$$

Por lo tanto, el lema 20 nos dice que salvo constantes fijas el número de horodiscos de  $T_n(Y)$  es maximal.

También necesitamos el siguiente resultado en la demostración del lema 19.

**Lema 21.** *Sean  $H_1 = H(a_1, R_1)$  y  $H_2 = H(a_2, R_2)$  dos horodiscos correspondientes a la misma cúspide  $Y$ . Entonces, dada  $C \geq 1$ , existen  $g_1, g_2 \in G$  tales que*

(i)  $g_i(H_1) = H_2$ ,  $i = 1, 2$ ,

(ii)  $\frac{1}{3C} \frac{R_2}{R_1} \leq |g'_1(z)| \leq 3 \frac{R_2}{R_1}$ , para  $\operatorname{Re}(z - a_1) \geq 0$ ,  $|z - a_1| \leq CR_1$ ,

(iii)  $\frac{1}{3C} \frac{R_2}{R_1} \leq |g'_2(z)| \leq 3 \frac{R_2}{R_1}$ , para  $\operatorname{Re}(z - a_1) \leq 0$ ,  $|z - a_1| \leq CR_1$ .

Con estos dos resultados podemos ya dar la prueba del lema 19.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 19. Sean  $s$  y  $n_0(G, s)$  como en el lema 20. Fijamos un horodisco,  $H_0 = H(a_0, R_0)$ , que corresponda a la cúspide  $Y$ .

Sea  $H' = H(a', R')$  el horodisco correspondiente a  $Y$  dado en el lema 20; este  $H'$  jugará el papel de una unidad de referencia en la construcción.

Empezamos por definir  $\mathcal{H}_0 = \{H_0\}$ ,  $\mathcal{I}_0 = \{I_0 = I(a_0, r_0)\}$ , donde  $r_0 = sR_0$ .

Para la primera generación usamos la familia  $T_n = T_n(Y)$  ( $n \geq n_0$ ) del lema 20. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la mitad de los intervalos de la familia  $T_n$  tiene centros en  $[a', \infty)$ . Además, por el lema 21, existe  $g \in G$  tal que

$$(1) \quad g(H') = H_0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{6s} \frac{R_0}{R'} \leq |g'(z)| \leq 3 \frac{R_0}{R'}, \quad \text{para } |z - a'| < (2s)R', \operatorname{Re}(z - a') \geq 0.$$

Obsérvese que si  $H(\tilde{a}, \tilde{R}) = g(H(a, R))$  para algún  $H(a, R) \in T_n$  con  $a \in [a', \infty)$ , entonces  $R \sim (R_0/R') \rho^{n+1}$ . Por lo tanto  $R \sim R_0 t$  con  $t = \rho^{n+1}$ .

Ahora, para  $n$  suficientemente grande, es claro que existe una subcolección  $\tilde{T}_n \subset T_n$  tal que el conjunto  $\mathcal{H}_1 = \{g(H(a, R)) : H(a, R) \in \tilde{T}_n\}$  verifica

- (i) Para todo  $H_i = H(a_i, R_i)$ ,  $H_j = H(a_j, R_j) \in \mathcal{H}_1$   $I(a_i, sR_i) \cap I(a_j, sR_j) = \emptyset$ .
- (ii) Existe  $0 < c' < 1$  tal que si  $H(a, R) \in \mathcal{H}_1$ , entonces  $I(a, sR) \subset I(a_0, c'sR_0)$ .
- (iii) Si  $H(a, R) \in \mathcal{H}_1$  entonces  $R \sim R_0 t$  con  $t = \rho^{n+1}$ .
- (iv)  $\#\mathcal{H}_1 \sim \left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\right)^\delta$ .

Finalmente, definimos

$$\mathcal{I}_1 = \{I(a, sR) : H(a, R) \in \mathcal{H}_1\}.$$

Por construcción, es claro que los intervalos de  $\mathcal{I}_1$  son disjuntos con radios comparables a  $r_1 := r_0 t$  y que  $\mathcal{I}_1 \subset c'\mathcal{I}_0$ . Además,

$$\#\mathcal{I}_1 = \#\mathcal{H}_1 \sim \frac{1}{t^{\delta(G)}}.$$

Supongamos ahora que hemos alcanzado el paso  $j$ -ésimo y hemos construido  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_j$ ,  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_j$  y definido  $r_j$ . Numeramos los horodiscos en  $\mathcal{H}_j$  como  $H_1, \dots, H_k$  con radios respectivamente  $R_1, \dots, R_k$ . Por el lema 21, para cada  $H_u \in \mathcal{H}_j$  existe  $g_u \in G$  tal que

$$(1') \quad g_u(H') = H_u,$$

$$(2') \quad \frac{1}{6s} \frac{R_u}{R'} \leq |g'_u(z)| \leq 3 \frac{R_u}{R'}, \quad \text{para } |z - a'| < R', \operatorname{Re}(z - a') \geq 0.$$

Para cada  $u$ , y usando la  $g_u$  definimos primero la familia de horodiscos

$$\mathcal{H}_{j+1,u} = \{g_u(H(a, R)) : H(a, R) \in \mathcal{H}_1\}$$

Si  $H(a, R) \in \mathcal{H}_{j+1,u}$ , entonces  $R \sim (R_s/R')\rho^{n+1} \sim r_j t$ . Además  $\# \mathcal{H}_{j+1,s} = \# H_1 \sim 1/t^{\delta(G)}$ . La unión de estas colecciones de horodiscos es la familia  $\mathcal{H}_{j+1}$ , es decir,

$$\mathcal{H}_{j+1} = \bigcup_{u=1}^k \mathcal{H}_{j+1,u}.$$

Finalmente definimos

$$\mathcal{I}_{j+1} = \{I(a, sR) : H(a, R) \in \mathcal{H}_{j+1}\}.$$

Por construcción es de nuevo claro que los intervalos de la familia  $\mathcal{I}_{j+1}$  son disjuntos con radio comparable a  $r_{j+1} := r_j t$  y que  $\mathcal{I}_{j+1} \subset c' \mathcal{I}_j$ .

Esto finaliza el paso inductivo de la construcción del conjunto  $C_t$ . ■

Veamos ahora las pruebas de los lemas 20 y 21. Empecemos por este último.

**DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 21.** Como  $H_1$  y  $H_2$  están asociadas a la misma cúspide existe  $\tilde{g} \in G$  tal que  $\tilde{g}(H_1) = H_2$ . Además, es claro, ver *eg.* [K, p.60], que existen  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  en el estabilizador de  $a_2$  tales que  $g_i = \tilde{g}_i \circ \tilde{g} \in G$  satisface

$$(i) \quad g_i(H_1) = H_2, \quad i = 1, 2,$$

(ii)  $g_i(a_1 + 2R_1\sqrt{-1}) = w_i$  con  $w_i \in \partial H_2$  tal que la longitud hiperbólica de la porción de  $\partial H_2$  entre  $w_i$  y  $a_2 + 2R_2\sqrt{-1}$  es menor o igual que 1 ( $i = 1, 2$ ). Además,  $\operatorname{Re}(w_1 - a_2) \geq 0$  y  $\operatorname{Re}(w_2 - a_2) \leq 0$ .

Denotemos por  $H_0$  el horociclo  $H_0 = H(0, 1)$ . Demostraremos que si  $\eta$  es una transformación de Möbius de  $\mathbb{H}^2$  tal que

$$(i') \quad \eta(H_0) = H_0,$$

(ii')  $\eta(2\sqrt{-1}) = w$ , donde la longitud hiperbólica de la porción de  $H_0$  entre  $2\sqrt{-1}$  y  $w$  es menor o igual que 1, y  $\operatorname{Re} w \geq 0$

Entonces,  $1/(3C) \leq |\eta'(z)| \leq 3$ , para  $|z| \leq C$  y  $\operatorname{Re} z \geq 0$ .

El resultado deseado para  $g_1$  es entonces obtenido componiendo  $\eta$  con traslaciones y dilataciones. El argumento para  $g_2$  es similar.

Sea  $\eta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc = 1$ . Como  $\eta(0) = 0$  se tiene que  $b = 0$ . Sea  $w = x_0 + y_0\sqrt{-1}$ , usando que  $\eta(2\sqrt{-1}) = w$ , obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = \frac{4c}{d(4c^2 + d^2)} \\ y_0 = \frac{2}{4c^2 + d^2} \end{cases}$$

De (ii') se deduce que  $0 \leq x_0 \leq 1$  y  $1 \leq y_0 \leq 2$ . Por lo tanto obtenemos

$$\begin{cases} 0 \leq 4\frac{c}{d} \leq 4c^2 + d^2, \\ 1 \leq 4c^2 + d^2 \leq 2. \end{cases}$$

y, consecuentemente,  $0 \leq c/d \leq 1/2$  y  $1/2 \leq d^2 \leq 2$ .

Por lo tanto para  $z = x + y\sqrt{-1}$  con  $|z| \leq C$  y  $x \geq 0$  se obtiene que

$$\frac{1}{2} \leq c^2|z|^2 + d^2 + 2cdx \leq \frac{9}{2}C^2,$$

y como

$$|g'(z)|^2 = \frac{1}{|cz + d|^2} = \frac{1}{c^2|z|^2 + d^2 + 2cdx},$$

obtenemos el resultado. ■

El lema 20 se obtiene del siguiente resultado sobre la distribución de los horodiscos asociados a las cúspides de  $\mathcal{R}$ .

**Lema 22.** *Existen  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$  y un conjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{R}$ , tales que para toda cúspide  $Y$  el conjunto  $A_n(Y)$  de horodiscos correspondientes a esta cúspide con puntos base en  $K$  y radios  $R \in [\rho^{n+1}, \rho^n)$ , verifica, para todo  $n \geq n_0(G, Y)$ ,*

$$\#A_n(Y) \sim \left(\frac{1}{\rho^n}\right)^\delta.$$

**OBSERVACIÓN.** En dimensión superior hay un resultado análogo al del lema 22 para subgrupos geoméricamente finitos de  $\text{Möb}(\mathbb{H}^{d+1})$ . La demostración es similar.

La demostración del lema 22 sigue las mismas líneas de la demostración de la proposición 4 en [S2] y es una consecuencia de estimaciones asintóticas de la función orbital de conteo. Para grupos de co-volumen finito, el caso considerado en [S2], estas estimaciones son clásicas. Para nuestro caso (grupos geoméricamente finitos) se deben a S.J. Patterson (sin publicar) y son como sigue:

Sea  $G$  un grupo discreto de isometrías hiperbólicas de la bola unitaria  $\mathbb{B}^n$ . Sea  $\omega, \eta \in \mathbb{B}^n$ . Definimos  $N(r, \omega, \eta)$  como el número de elementos  $g \in G$  tales que

$$g(\eta) \in \{x \in \mathbb{B}^n : \rho_{\mathbb{B}^n}(\omega, x) \leq r\}$$

donde  $\rho_{\mathbb{B}^n}$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathbb{B}^n$  asociada a la métrica  $ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$ .



**Teorema (Patterson).** *Si  $G$  es geométricamente finito, entonces existe  $r_0 > 0$  dependiendo de  $\omega$  y  $\eta$  tal que*

$$N(r, \eta, \omega) \sim e^{r\delta} \quad \text{para } r \geq r_0,$$

donde  $\delta$  es el exponente de convergencia de  $G$ .

### 6.5. Variedades hiperbólicas 3-dimensionales.

La demostración del teorema 15 es similar a la del teorema 14 excepto que ahora puede haber cúspides de rango no maximal y por ello la demostración del lema 21 tiene que ser modificada. Este lema fue usado de manera crucial en la prueba del teorema 14 y su versión 3-dimensional requiere una nueva idea que explicaremos a continuación.

Para cualquier grupo geométricamente finito  $G$ , sus puntos fijos parabólicos tienen entornos cuspidales. Recordamos (ver capítulo 1, sección 1.2) que para  $p$  un punto fijo parabólico, un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{H}^3$  se denomina *entorno cuspidal* de  $p$  si existe  $h \in \text{Möb}(\mathbb{H}^3)$  tal que  $h(p) = \infty$ , y

- (i)  $h(U) = \mathbb{H}^3 \setminus (\mathbb{R}^k \times \mathbb{B}^{3-k})$  donde  $\mathbb{B}^{3-k}$  es la bola unidad de  $\mathbb{R}^{3-k}$  y  $k$  es el rango de la cúspide,
- (ii)  $\text{clausura}(U) \cap \Lambda(G) = \{p\}$ ,
- (iii)  $g(U) = U$  para todo  $g \in G_p$ , y  $g(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G \setminus G_p$ .

Obsérvese que  $h^{-1}(\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 1\})$  es la horobola con punto base  $p$ .

El sustituto del lema 21 que necesitamos es el siguiente:

**Lema 21'.** *Sean  $H_1 = H(a_1, R_1)$  y  $H_2 = H(a_2, R_2)$  dos horobolas correspondientes a la misma cúspide  $\mathcal{E}$ . Entonces, dada  $C \geq 1$ , existen  $g_1, g_2 \in G$  tales que*

$$(i) \quad g_i(H_1) = H_2, \quad i = 1, 2,$$

y para  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$ ,

$$(ii) \quad \frac{1}{cC} \frac{R_2}{R_1} \leq |g'_1(x)| \leq c \frac{R_2}{R_1}, \quad \text{si } (x_1, x_2) \in Q_1, \quad |x - a_1| \leq CR_1.$$

$$(iii) \quad \frac{1}{KC} \frac{R_2}{R_1} \leq |g'_2(x)| \leq K \frac{R_2}{R_1}, \quad \text{si } (x_1, x_2) \in Q_2, \quad |x - a_1| \leq CR_1.$$

Aquí  $K$  es una constante positiva y  $Q_1, Q_2$  denotan los dos semiplanos complementarios en  $\mathbb{R}^2$  de una línea en  $\mathbb{R}^2$  a través de  $a_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $k$  el rango de la cúspide. Como señalamos anteriormente las cúspides de rango maximal ( $k = 2$ ) son tratadas de la misma manera que en la prueba del lema 21.

Sea  $k = 1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathcal{E}$  es la cúspide correspondiente a la transformación  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + 1, x_2, x_3)$  y  $U_\infty := \overline{\mathbb{H}}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{B}^2)$  es el entorno cuspidal en infinito.

Como  $H_1$  y  $H_2$  corresponden a la misma cúspide  $\mathcal{E}$ , existen  $\tilde{g}_i \in G$  ( $i = 1, 2$ ) tales que

$$H_i \subset U_i := \tilde{g}_i(U_\infty),$$

con  $U_i$  un entorno cuspidal con punto base  $a_i$  de la horobola  $H_i$ . Denotemos por  $N_i$  el polo "norte" de  $H_i$  ( $a_i$  es el polo sur).

El conjunto  $\tilde{g}_i(U_i)$  es la envolvente convexa en  $\overline{\mathbb{H}}^3$  de dos discos  $B_{ij} = B(c_{ij}, R_{ij})$ , ( $j = 1, 2$ ) en  $\mathbb{R}^2$  tales que  $\overline{B}_{i1} \cap \overline{B}_{i2} = \{a_i\}$ . Sea  $C_i$  la geodésica en  $\mathbb{H}^3$  de longitud euclídea máxima con puntos finales en  $\partial B_{i1} \cup \partial B_{i2}$ ;  $C_i$  y  $H_i$  son tangentes. Denotemos por  $p_i$  el punto de tangencia, entonces es geoméricamente claro que la distancia hiperbólica desde el polo norte  $N_i$  de  $H_i$  hasta  $p_i$  es a lo sumo 1. (Ver figura 12).

Obsérvese que  $q_i := g_i^{-1}(p_i) = (t_i, 0, 1)$  para algún  $t_i \in \mathbb{R}$ . Sea  $\omega$  la transformación  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + 1, x_2, x_3) \in G$  y  $\eta_k = \tilde{g}_2 \omega^k \tilde{g}_1^{-1}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Es fácil ver que  $\eta_k(H_1) = H_2$  y  $\eta_k(a_1) = a_2$ . El hecho importante es que, para todo  $k$ , el punto  $\eta_k^{-1}(N_2)$  pertenece a  $\tilde{g}_1(L_1)$ , donde  $L_1$  es la recta en  $x_3 = 1$  paralela a  $\{x_2 = 0, x_3 = 1\}$  y que pasa por el punto  $\tilde{g}_2^{-1}(N_2)$ . Similarmente, para todo  $k$ , el punto  $\eta_k(N_1)$  pertenece a  $\tilde{g}_2(L_2)$ , donde  $L_2$  es la recta paralela a  $L_1$  que pasa por  $\tilde{g}_1^{-1}(N_1)$ . Usando que  $\text{dist}(N_i, p_i) \leq 1$  para  $i = 1, 2$  se obtiene que  $\text{dist}(L_1, L_2) \leq 2$ .

Sea  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_3(\eta_{k_0}^{-1}(N_2))$  es máximo, i.e.,  $\text{dist}(\eta_{k_0}^{-1}(N_2), N_1)$  es mínimo. Como  $\text{dist}(L_1, L_2) \leq 2$ , tenemos que  $\text{dist}((\eta_{k_0}^{-1}(N_2), N_1) \leq 3$ .

Sean ahora  $g_1 = \eta_{k_0+2}$  y  $g_2 = \eta_{k_0-2}$ . Entonces  $\text{dist}(g_i(N_1), N_2) \leq 5$  para  $i = 1, 2$ . (Ver figura 13).

Es geoméricamente claro que

$$|g_1^{-1}(\infty) - g_2^{-1}(\infty)| > c'_0 R_1 \quad \text{y} \quad c'_1 R_1 \leq |\gamma_i^{-1}(\infty)| \leq c'_2 R_1 \quad (i = 1, 2),$$

para algunas constantes positivas  $c'_0, c'_1, c'_2$ . Sea  $L$  la recta que pasa por  $a_1$  y por el punto medio del segmento que une  $g_1^{-1}(\infty)$  y  $g_2^{-1}(\infty)$ , y sean  $Q_1, Q_2$  los semiplanos complementarios de la recta  $L$  tales que  $g_i^{-1}(\infty) \in Q_i$ , ( $i = 1, 2$ ). Entonces para todo  $x \in Q_i$ , ( $i = 1, 2$ ), tenemos que  $|x - g_j^{-1}(\infty)| \geq c_0 R_1$  para  $j \in \{1, 2\}$  y  $j \neq i$ . Aquí  $c_0$  es también una constante positiva.

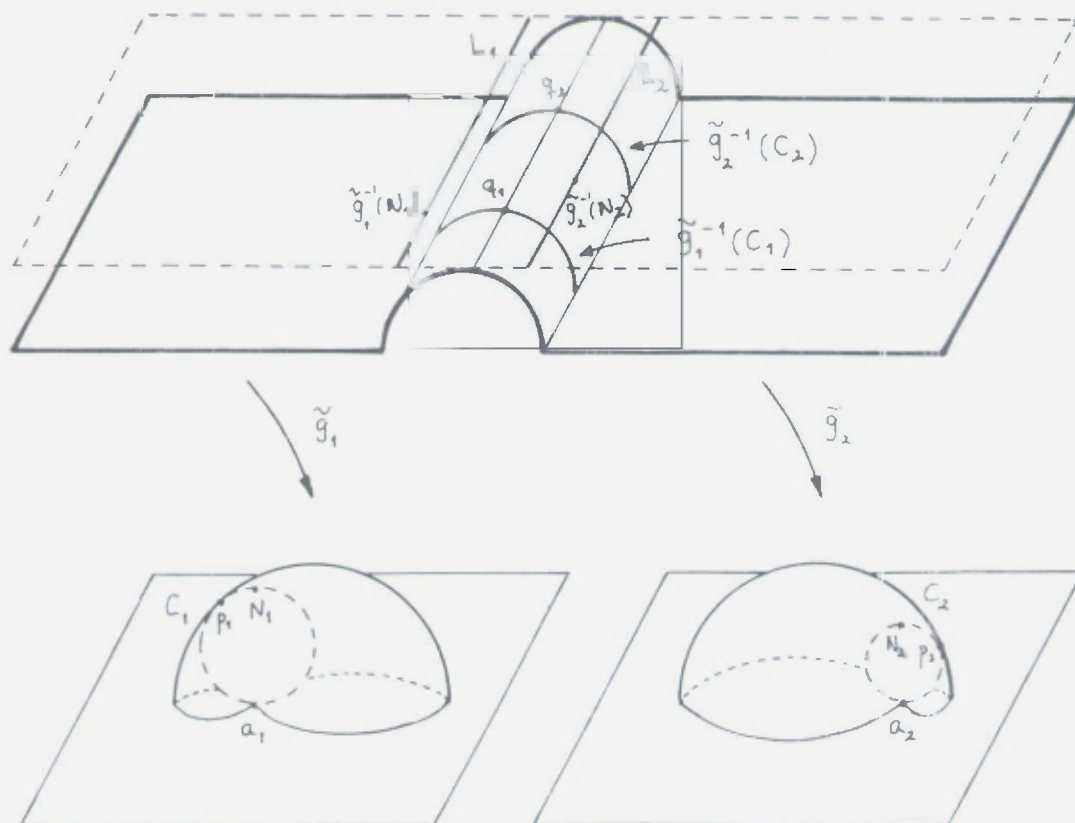


Figura 12

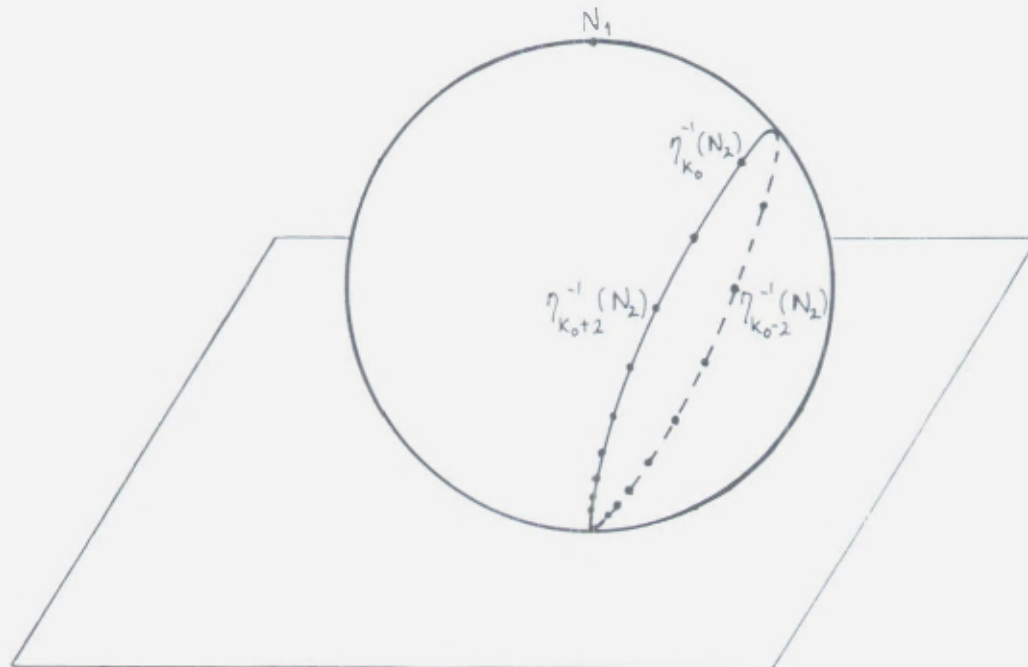


Figura 13

Denotemos ahora por  $H_0$  el horociclo  $H_0 = H(0, 1)$  y sea  $\eta$  una transformación de Möbius de  $\mathbb{H}^3$  tal que

$$(i') \quad \eta(H_0) = H_0,$$

(ii')  $\eta((0, 0, 2)) = \tilde{x}$ , donde la distancia hiperbólica entre  $(0, 0, 2)$  y  $\tilde{x}$  es menor o igual que 5.

Para  $x \in \mathbb{H}^3$  tal que  $|x| \leq C$  y  $|x - \eta^{-1}(\infty)| \geq c_0$ , veremos que

$$(5.1) \quad \frac{1}{KC} \leq |\eta'(x)| \leq K, \quad \text{para una constante absoluta } K > 0.$$

El resultado deseado para  $g_i$ , ( $i = 1, 2$ ), se obtiene componiendo  $\eta$  con traslaciones y dilataciones.

Para obtener (5.1) usaremos la representación por cuaterniones de las transformaciones de Möbius en  $\mathbb{H}^3$ , (ver capítulo 1, sección 1.7). Identificamos  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$  con el cuaternión  $x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j}$ .

Para todo  $x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j}$  tenemos que

$$\eta(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ .

Como  $\eta(0) = 0$  se obtiene que  $b = 0$ . Sea  $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\mathbf{i} + \tilde{x}_3\mathbf{j}$ , usando que  $\eta(2\mathbf{j}) = \tilde{x}$  obtenemos

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{4 \operatorname{Re}(\bar{c} \bar{d})}{|d|^2(4|c|^2 + |d|^2)}, \\ \tilde{x}_2 = \frac{4 \operatorname{Im}(\bar{c} \bar{d})}{|d|^2(4|c|^2 + |d|^2)}, \\ \tilde{x}_3 = \frac{2}{4|c|^2 + |d|^2}. \end{cases}$$

Por (ii')  $c' \leq \tilde{x}_3 \leq 2$ , para algún  $c' > 0$ , y  $|\tilde{x}| \leq 1$ . Además, de las igualdades para  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  se deduce que

$$\frac{|c|}{|d|} = \frac{(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)^{1/2}}{2\tilde{x}_3}.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\begin{cases} \frac{|c|}{|d|} \leq \frac{1}{2c'}, \\ 1 \leq 4|c|^2 + |d|^2 \leq \frac{2}{c'}. \end{cases}$$

y en consecuencia,  $|c| \leq c_1|d|$  and  $c_2 \leq |d| \leq c_3$ , para algunas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$ .

Por consiguiente para  $x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j}$  con  $|x| \leq C$  y  $|x + \frac{d}{c}| = |x - \eta^{-1}(\infty)| \geq c_0$  se tiene que:



Si  $C|c| \leq |d|/2$ , entonces

$$|cx + d| \geq |d| - C|c| \geq \frac{|d|}{2} \geq \frac{c_2}{2}.$$

Si  $C|c| > |d|/2$ , entonces

$$|cx + d| = |c| \left| x + \frac{d}{c} \right| \geq c_0|c| \geq \frac{c_0|d|}{2C} \geq \frac{c_0 c_2}{2C}.$$

Además,  $|cx + d| \leq C|c| + |d| \leq (Cc_1 + 1)|d| \leq (Cc_1 + 1)c_3$ .

Como  $|\eta'(x)| = \frac{1}{|cx + d|}$ , obtenemos el resultado. ■

## 6.6. Aplicaciones.

**Corolario 6.** *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann no compacta y con al menos una cúspide  $Y$ . Si  $H$  denota el conjunto de direcciones  $v \in S(p)$  tales que la geodésica  $\gamma_{p,v}$  alcanza una altura máxima en la cúspide  $Y$ . Entonces  $\text{Dim}(H) = 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideramos dos casos diferentes dependiendo si  $\mathcal{R}$  tiene función de Green o no.

Si  $\mathcal{R}$  tiene función de Green entonces es un resultado bien conocido que, dado un punto  $p \in \mathcal{R}$ , para casi toda  $v \in S(p)$ , la geodésica  $\gamma_{p,v}$  en  $\mathcal{R}$  satisface

$$\text{dist}(p, \gamma_{p,v}(t)) \longrightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

donde  $\text{dist}$  es la distancia en  $\mathcal{R}$ . Así el resultado se obtiene en este caso. Por otra parte, si  $\mathcal{R}$  no tiene función de Green entonces  $\delta(G) = 1$ , (ver e.g. [A6]), y el resultado se sigue del teorema 14.

Al aplicar el teorema 14" a los grupos de Hecke  $\Gamma(\lambda)$  (ver capítulo 1, sección 1.7) se obtiene el siguiente resultado tipo Jarník.

**Corolario 7.** *La dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos límites  $\xi \in \Lambda(\Gamma(\lambda))$  tales que*

$$\left| \xi - \frac{\alpha}{\beta} \right| \geq \frac{C(\xi)}{\beta^2}$$

*para toda  $\lambda$ -fracción finita, es  $\delta(\Gamma(\lambda))$ .*

Recordamos que la función  $\lambda \rightarrow \delta(\Gamma(\lambda))$  es continua, Lipschitz, estrictamente decreciente en  $[2, \infty)$  y satisface que  $\delta(\Gamma(2)) = 1$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta(\Gamma(\lambda)) = 1/2$ .

Finalmente, es conveniente señalar que el Teorema 14 ha sido utilizado recientemente por J.L. Fernández y D. Pestana para probar el siguiente teorema de teoría de funciones:

**Teorema [FP].** *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann hiperbólica distinta de  $\Delta \setminus \{0\}$ . Si  $f : \Delta \longrightarrow \mathcal{R}$  es holomorfa, entonces*

$$\dim\{\theta : d(\theta) < +\infty\} \geq \delta(\mathcal{R}),$$

donde

$$d(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} \text{dist}(f(re^{i\theta}), f(0)),$$

$\delta(\mathcal{R})$  es el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de  $\mathcal{R}$  y  $\text{dist}$  denota distancia hiperbólica en  $\mathcal{R}$ .

## Referencias.

- [A1] Ahlfors, L.V., *Conformal invariants*. McGraw-Hill, 1973.
- [A2] Ahlfors, L.V., Finitely generated Kleinian groups. *Amer. J. Math.* **86** (1964).
- [A3] Ahlfors, L.V., Fundamental polyhedrons and limit sets of Kleinian groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **55** (1966).
- [A4] Ahlfors, L.V., Möbius transformations and Clifford numbers. Differential geometry and complex analysis, H. E. Rauch Memorial Volume. Springer-Verlag, 1985.
- [A5] Ahlfors, L.V., Möbius transformations in  $\mathbb{R}^n$  expressed through  $2 \times 2$  matrices of Clifford numbers. *Complex variables* **5** (1986).
- [A6] Ahlfors, L.V., *Möbius transformations*. Lecture Notes, University of Minnesota. Minneapolis, 1981.
- [Ar] Aravinda, C.S., Bounded geodesics and Hausdorff dimension. Prepublicación, 1993.
- [BS] Baker, A., Schmidt, W., Diophantine approximation and Hausdorff dimension. *Proc. London Math. Soc.* **3** (1970), 1-11.
- [B] Beardon, A. F., *The geometry of discrete groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [BM] Beardon, A. F., Maskit, B., Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra. *Acta Math.* **132** (1974), 1-12.
- [Be] L. Bers, An inequality for Riemann surfaces, *Differential Geometry and Complex Analysis*, H.E. Rauch memorial volume, Springer-Verlag, 1985.
- [BJ] Bishop, C., Jones, P., Hausdorff dimension and Kleinian groups. Prepublicación, 1994.
- [C] Carleson, L., *Selected problems on exceptional sets*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [D1] Dani, S.G., Bounded orbits of flows on homogeneous spaces. *Comment. Math. Helvetici* **61** (1986) 636-660.
- [D2] Dani, S.G., On badly approximable numbers, Schmidt games and bounded orbits of flows. London Math. Soc. Lecture Notes Series **134**, Cambridge University Press, 1989.
- [DVR] Dodson, M.M., Rynne, B.P., Vickers, J.A., Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension. *Mathematika* **37** (1990), 59-73.
- [DMPV] Dodson, M.M., Melián, M.V., Pestana, D., Velani, S., Ubiquity and Patterson measure. Por aparecer en *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*.
- [EGM] Eldstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J., Arithmetic Applications of the Hyperbolic Lattice Point Problem. *Proc. London Math. Soc.* **57** (1988), 239-283.
- [Fa] Falconer, *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*. J. Wiley, 1990.
- [FK] Farkas, H., Kra, I., *Riemann surfaces*. Springer-Verlag, 1980.



- [FM] Fernández, J.L., Melián, M.V., Bounded geodesics of Riemann surfaces and hyperbolic manifolds. Prepublicación, 1993.
- [FP] Fernández, J.L., Pestana, D., Radial images by holomorphic mappings. Prepublicación, 1994.
- [Fo] Ford, L.R., Fractions, *Amer. Math. Monthly* **45** (1938), 581-601
- [G] Greenberg, L., Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups, *Discrete groups and automorphic functions*, Academic Press, 1977.
- [J] V. Jarník, Zur metrischen theorie der diophantischen approximationen. *Prace Mat-Fiz.* **36** (1928-1929), 91-106.
- [KS] Kahane, J. P., Salem, R., *Ensembles parfaits et Séries Trigonométriques*, Hermann, 1963.
- [K] Kra, I., *Automorphic forms and Kleinian groups*. W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1972.
- [M] Manning, A., Dynamics of geodesic and horocycle flows on surfaces of constant negative curvature in *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*. Oxford University Press, 1991.
- [MP] Melián, M.V., Pestana, D., Geodesic excursions into cusps in finite-volume hyperbolic manifolds. *Michigan Math. J.* **40** (1992), 77-93.
- [MV] Melián, M.V., Velani, S., Geodesic excursions into cusps in infinite volume hyperbolic manifolds. Prepublicación, 1994.
- [MWW] Maclachlan, C., Waterman, P.L., Wielenberg, N.J., Higher dimensional analogues of the modular and Picard groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **312** (1989), 739-745.
- [N1] Nicholls, P., A lattice point problem in hyperbolic space. *Michigan Math. J.* **30** (1983), 273-287.
- [N2] Nicholls, P., *The ergodic theory of discrete groups*. London Math. Soc. Lecture Note Series **143**, Cambridge University Press, 1989.
- [P1] Patterson, S.J., Diophantine approximation in Fuchsian groups. *Phil. Trans. Royal Soc. London* **282** (1976).
- [P2] Patterson, S.J., The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.* **136** (1976), 241-273.
- [P3] Patterson, S.J., Some examples of Fuchsian groups. *Proc. Lond. Math. Soc.* **39** (1979), 276-298.
- [PS] Phillips, R.S., Sarnak, P., On the spectrum of the Hecke groups. *Duke Math. J.* **52** (1985), 211-221.
- [R] Rogers, C.A., *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, 1970.
- [Ro] Rosen, D., A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups. *Duke Math. J.* **21** (1954), 549-563.
- [S1] Sullivan, D., The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publ. Math. IHES* **50** (1979), 171-202.
- [S2] Sullivan, D., Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers and the logarithm law for geodesics. *Acta Math.* **149** (1982), 215-237.
- [S3] Sullivan, D., Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math* **153** (1984), 259-277.



- [Sch1] Schmidt, W., On badly approximable numbers and certain games. *Trans. Amer. Math. Soc.* **23** (1966).
- [Sch2] Schmidt, W., *Diophantine approximation*. Lecture Notes in Math. **785**.
- [St] Stratman, B., The Hausdorff dimension of bounded geodesics on geometrically finite manifolds. Prepublicación, 1993.
- [Th] Thurston, W., *Geometry and topology of 3-manifolds*. Lecture notes from a course given at Princeton University in 1978.
- [T1] Tukia, P., On isomorphisms of geometrically finite Kleinian groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **61** (1985), 171-214.
- [T2] Tukia, P., On the dimension of limit sets of geometrically finite Möbius groups. Prepublicación, 1993.
- [Ts] Tsuji, M., *Potential theory in Modern Function theory*. Chelsea, 1959.
- [W] Wolf, J.A., *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish Inc, Berkeley, 1977.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día  
de la fecha, acordó calificar la presente Tesis  
Doctoral con la censura de

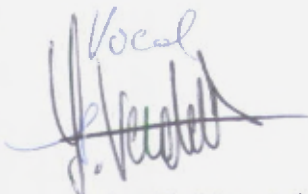
*apto cum laude (por una.)*  
Madrid, 17-6-94

Presidente

M. Dodson

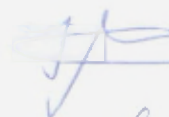
,

Vocal



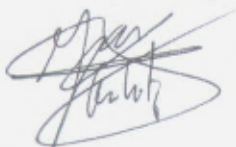
J. VERDURA

Vocal

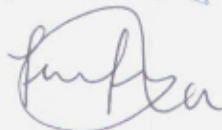


Fermi Bolea

Vocal



Secretario



Gabino González.